Integral-Rechnung

vorgetragen

von

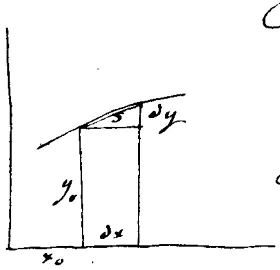
Winkler.

II Curs

Carl Kley.

1849

Rectification der Curven.



$$\partial y^2 + \partial x^2 = s^2$$

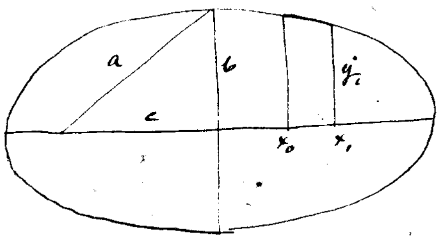
∂x ∞ klein wird s = Bogen

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\partial y^2 + \partial x^2}$$

$$S = \int_{x_0}^{x} \partial x \sqrt{1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}}$$

Rectification der Ellipse.

Die allgem. Gl. der Ellipse ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$



$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$S = \int_{x_0}^{x} \partial x \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}$$

$$S = \int_{x_0}^{x} \partial x \sqrt{\frac{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2}{a^2 - x^2}}$$

$x = az$ gesetzt

$z = \frac{x}{a}$ $\quad a^2 - b^2 = c^2$

$\frac{a^2 - b^2}{a} = \varepsilon^2$

$$S = \int_{\frac{x_0}{a}}^{\frac{x}{a}} a \cdot \partial x \sqrt{\frac{1 - \varepsilon x^2}{1 - x^2}}$$

da man jetzt wieder statt z x einführen kann.

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 x^2} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}\varepsilon^4 x^4 - \dots$$

$$S = \int_{\frac{x_0}{a}}^{\frac{x}{a}} a \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_{\frac{x_0}{a}}^{\frac{x}{a}} a \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dots$$

Allgem. kommt dieses Glied vor $\int_{\frac{x}{0}}^{\frac{x}{a}} a \frac{x^{2n}}{\sqrt{1 - x^2}} \partial x$.

$$S = a\left(\sin \text{arc} \frac{x}{a} - \sin \text{arc} \frac{x_0}{a}\right) + \dots$$

Oder man setzt in obige Formel $S = a \int_{\frac{x_0}{a}}^{\frac{x}{a}} \partial x \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 x^2}{1 - x^2}}$

$x = \sin \varphi$ $\quad S = a \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos\varphi \, d\varphi \sqrt{\frac{1 - \varepsilon \sin^2\varphi}{(1 - x^2) = \cos\varphi^2}}$

$$\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin\varphi^2 + \frac{1}{2\,3}\varepsilon^4\sin\varphi^4 - \dots$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin\varphi^2 + \dots\right)$$

$$S = a\left((\varphi-\varphi_0) - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sin\varphi^2\, d\varphi + \dots\right)$$

Allgem. Form der Glieder von S:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sin\varphi^{2n}\, d\varphi$$

Rectification der Parabel

2. Die allgem. Gl. der Parabel ist $y = a x^{n+1} + b$ ist gegeben, man soll die Parabel rectificiren

Es ist $y' = a(n+1)x^n$ also $S = \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+a^2(n+1)^2x^{2n}}$

$$S = a\left(x^{n+1} - x_0^{\,n+1}\right) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{a(n+1)x^n} - \frac{1}{2\cdot 4}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{a^3(n+1)^3x^{3n}}$$

da nämlich

$$\sqrt{a^2(n+1)^2x^{2n}+1} = a(n+1)x^n + \frac{1}{2}\frac{1}{a(n+1)x^n} - \dots$$

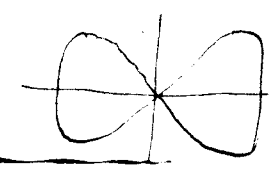
Integrirt gibt obiges.

$$S = a\left(x^{n+1} - x_0^{\,n+1}\right) - \frac{1}{2a(n+1)(n-1)}\left(\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{x_0^{\,n-1}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 4}\frac{1}{a^3(n+1)^3(3n-1)}\left(\frac{1}{x^{3n-1}} - \frac{1}{x_0^{\,3n-1}}\right) - \dots$$

Beispiel zur Uebung.

$y = \frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2}$



Der allgemeine Ausdruck für den Bogen einer Curve wird in besondern Fällen illusorisch. Dieselben sind etwa die folgenden

1. Wenn die Größe im Integralzeichen ∞ groß wird innerhalb der Grenzen der Integration u. bei dieser Gelegenheit die Zeichen ändert, so daß man für ab neg. das Integral neg. Elemente enthält

2. Wenn in Folge einer Transformation der Ausdruck unter dem Integralzeichen innerhalb der Integrationsgrenzen durch 0 geht u. sein Zeichen ändert

3. Wenn die Ordinate innerhalb der Grenzen der Integration ∞ groß oder discontinuirlich od. imaginär wird, in welchen Fällen man häufig ganz unrichtige Ausdrücke für den Bogen erhält namentlich z.B. einen Werth für den Bogen, welcher in der Wirklichkeit nicht existirt.

Dieselbigen Ausnahmefälle treten jedoch schon in der Differenzialrechnung auf.

So ist z.B. die Curve $y = \log(x-1)$ imaginär so lange $x < +1$ ist, während die trigonom. Tangente des Neigungswinkels also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-1}$$ für alle Werthe v. x reel wird u. während sogar der Krümmungsradius

$$\rho = \frac{(x^2-2x-2)^{\frac{3}{2}}}{x-1}$$ für Werthe v. $x \not> 1$ reel ist.

Oder:

$$y = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \sqrt{x^2-1} = y'$$

$$s = \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+y'^2} = \int_{x_0}^{x} x\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2-x_0^2)$$

Offenbar ist nun die Ordinate y für alle Werthe v. $x < +1$

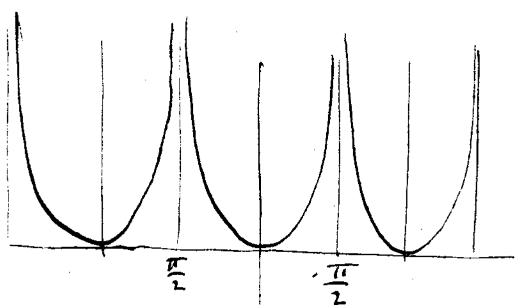
Imaginär, während der Bogen immer reell für alle möglichen Werthe von x reell bleibt

2. Man soll die Curve rectificiren deren Gl.

$$y = -\tfrac{1}{2}\log(\cos x)^2$$

$$y' = \frac{\sin x}{\cos x} = tg\, x \qquad s = \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+tg\, x^2} = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\cos x}$$

$$\int\frac{dx}{\cos x} = \log tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \qquad s = \log\frac{tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{tg\left(\frac{x_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

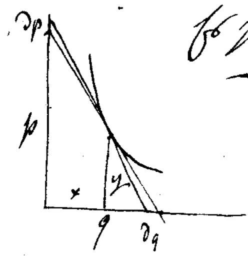


$x_0 = 0$ gesetzt giebt

$$s = \log\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

Diese Formel gilt aber nur bis $x = \frac{\pi}{2}$ u. wird für grössere Werthe unbrauchbar, weil s imaginär wird.

Beispiel zur Übung



Es soll die Curve so construirt sein, daß immer $p^n + q^n = a^n$

Man soll die Gl. dieser Curve aufstellen

$$(q-x) : y = q : p$$

$$px + qy = pq$$

Auflösung

Man soll die Curve rectificiren, welche auf folgende Weise entsteht. Ziehe man an dem Punkt $x\,y$ eine Tangente, welche die Achsen in den Entfernungen q u. p v. Anfangspunkt schneidet, so soll jederzeit $p^n + q^n = a^n$ sein

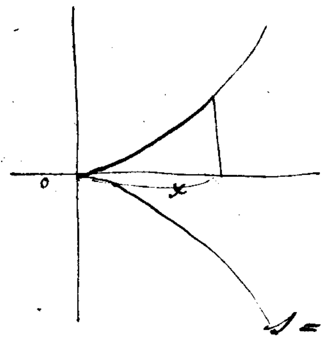
Die Gleichung der Curve ergibt sich dadurch, daß man erst bemerkt, daß $px + qy = pq$ u. ferner daß wenn man die beiden Gl. nach p u. q differenzirt, was mit einer cont. Drehung der Tangente um den Punkt $x.y$ gleichbedeutend ist, wobei die Coordinaten $x\,y$ constant bleiben

Wenn man die Gl. 1 u 2 nach p u. q differenzirt so erfolgt

$$\frac{\partial p}{\partial q} = -\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} \text{ u. } \frac{\partial p}{\partial q} = \frac{-(p-y)}{(q-x)}, \text{ woraus } 3,\ \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} = \frac{p-y}{q-x}$$

Nun folgt aus 2 $\quad 4,\ \frac{1}{q-x} = \frac{p}{qy}$ u. $p - y = \frac{px}{q}$ (5

Man solle die Neil'sche Parabel rectificiren. denn Gl. $y^2 = ax^3$ od. $y = x\sqrt{ax}$ ist



$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3}{2}\sqrt{ax}$$

$$s = \int_0^x \partial x \sqrt{1 + \frac{9}{4}ax}$$

$$1 + \frac{9}{4}ax = z \qquad \partial x = \frac{4}{9a}\,\partial z$$

$$s = \int_0^x \frac{4}{9a}\sqrt{z}\cdot\partial z$$ welches integrirt gibt

$$\frac{8}{27a} z^{\frac{3}{2}} + C$$ folglich s =

$$s = \frac{8}{27a}\left(\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}ax\right)^3} - 1\right)$$

Diese Art der ... gilt auch für negative x, welche sich von 0 bis $\frac{-4}{9a}$ erstrecken können ohne daß dasselbe imaginär wird. Da aber die vorliegende Curve keine Punkte auf der negativen Seite der Achse enthält so liegt der Widerspruch auf der Hand.

Der Grund dieses Widerspruchs liegt bei diesem sowie bei dem ersten Beispiel darin, daß der Differenzialquotient $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3}{2}\sqrt{ax}$ eine Quadratwurzel enthält, welche die Grenzen festsetzt, innerhalb welchen x allein liegen darf ohne daß y imaginär wird. Die Rectificationsformel nimmt aber das Quadrat des Differenzialquotienten in Anspruch, entfernt dadurch die Wurzel u. damit jene Bestimmung über die zulässigen Werthe v. x

---

und wenn man in 9 einsetzt $\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} = \frac{x}{y}$, woraus

$q = p\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ od. $q^n = p^n\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ und in 1 eingesetzt

$p^n\left\{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right\} = a^n$ Aus 3 u. 4 geht hervor: $\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} = \frac{p(p-y)}{qy}$

$\left(\frac{q}{p}\right)^n + 1 = \frac{p}{y}$ mit p^n multiplicirt aus 3 u. 5 $\left(\frac{p}{q}\right)^n + 1 = \frac{q}{x}$

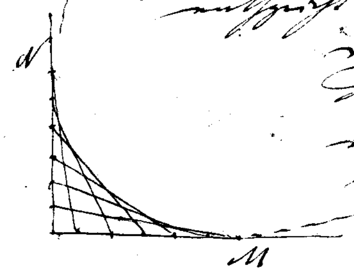
$q^n + p^n = \frac{p^{n+1}}{y} = a^n \quad q^n + p^n = \frac{q^{n+1}}{x}$ $\left\{\begin{array}{l} p = a^{\frac{n}{n+1}}\cdot y^{\frac{1}{n+1}} \\ q = a^{\frac{n}{n+1}}\cdot x^{\frac{1}{n+1}} \end{array}\right.$ woraus

$a^{\frac{nn}{n+1}}\left(x^{\frac{n}{n+1}} + y^{\frac{n}{n+1}}\right) = a^n$ oder s. f.

$$a^{\frac{n}{n+1}} = \left(x^{\frac{n}{n+1}} + y^{\frac{n}{n+1}}\right)$$

Diese Gleichung gilt allgemein für alle Werthe von n; wir wollen jedoch nur die Fälle betrachten, wo $n = 1$ u. 2 ist. Für den ersten Fall ist

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ Die Curve welche aus seiner Definition entspringt ist nur ein endlicher Bogen MN zu erhalten. Es aber gibt einen ins Unendliche sich erstreckenden Parabelzweig welcher ausserhalb der Punkte M und N mit der Definition nicht übereinstimmt.

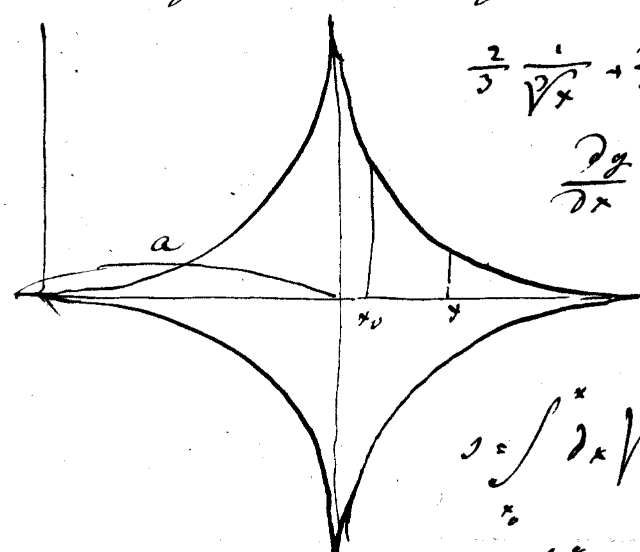


Wenn man nun den Bogen der definirten Curve verlangt so erhält man den Bogen einer Parabel und dieser Ausdruck wird für Werthe v. x u. y ganz unrichtig wenn sie ausserhalb $x=a$ od. $y=a$ fallen.

Für den zweiten Fall $n=2$ erhalten wir

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$$

Verlangt man den Bogen dieser Curve, so ist



$$\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\frac{\partial y}{\partial x}=0$$, woraus

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \qquad \frac{\partial y^2}{\partial x^2}=\sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}\right)=-1+\sqrt[3]{\left(\frac{a}{x}\right)^2}$$

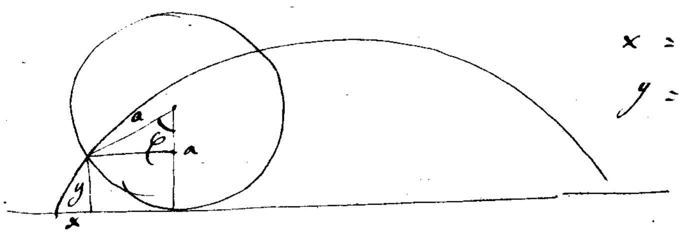
$$s=\int_{x_0}^{x}\partial x\sqrt{1-1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}}$$

$$=\int_{x_0}^{x}\partial x\sqrt[3]{\frac{a}{x}} \quad =\frac{3}{2}\sqrt[3]{ax^2}+C$$

erfolgt bestimmt integr. $s=\frac{3}{2}\sqrt[3]{a x^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{a x_0^2}$

Obschon hier die Gl. der Curve es nicht gestattet x od. $y > a$ zu nehmen, so gibt gleichwohl die Formel für den Bogen für Werthe v. x reelle Resultate, welche ausserhalb a liegen.

Darum zeigt sich daß die Formel für pos. u. neg. x. denselben Bogen, was offenbar unrichtig ist. Ja, wenn man den Bogen von $x_0 = -a$ bis $x = +a$ verlangt, so gibt die Formel $s = 0$. Der Grund hievon liegt darin, daß innerhalb dieser Grenzen die Function unter dem Integralzeichen durch ∞ geht u. bei dieser Gelegenheit ihr Zeichen ändert, so daß das Logarithmus Integral Elemente von entgegengesetzter Größe mit sich führt, die sich aufheben



$$x = a(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = a(1 - \cos\varphi)$$

$$s = \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$dy = a \sin\varphi \, d\varphi$$
$$dx = a(1 - \cos\varphi)\, d\varphi$$
$$dx = y \, d\varphi \qquad \cos\varphi = \frac{a-y}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin\varphi}{y} \qquad \sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{a^2 - 2ay + y^2}{a^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} \qquad \sin\varphi = \frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2}$$

$$s = \int dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$s = \int dy \sqrt{1 + \frac{y^2}{2ay - y^2}} = \sqrt{2a}\int \frac{dy}{\sqrt{2ay - y}}$$

$$s = \sqrt{2a}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{2a - y}} = -2\sqrt{2a}\int_0^y \frac{-dy}{2\sqrt{2a - y}}$$

Durch Substitution integr. $-2\sqrt{2a}\cdot\sqrt{2a - y} + \text{Const.}$

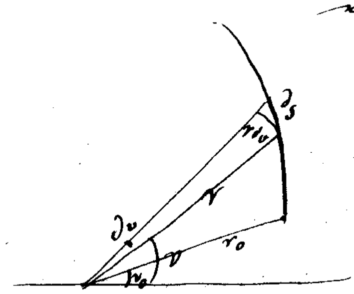
$y = 0 \qquad -4a + \text{Const.}$

$s = 4a - 2\sqrt{2a}\cdot\sqrt{2a - y}$ Diese Formel ist in doppelter Hinsicht mangelhaft, denn sie gibt einen realen Bogen für negative Ordinaten

welche nicht stattfinden.
Ferner kann man unmittelbar aus ihr den Bogen nicht finden, welcher einer ganzen Umdrehung entspricht, weil $s=0$ erfolgt. Der Grund hiervon liegt in dem Unendlichwerden der Function unter dem Integralzeichen bei $y=2a$, u. daß daß man für $y=2a$ integr. u. erhält den halben Bogen $=4a$ u. den ganzen $s=8a$

Rectification der Curven deren Gl. in Polarcoordinaten gegeben ist

Es seien r u. v die Polarcoordinaten. Man lasse dann dv variiren, so wird r um dr sich ändern u. dieser Änderung wird ein Bogenelement ds entsprechen bestimmt durch die Gl.:



$$ds^2 = dr^2 + r^2 dv^2, \text{ woraus}$$

$$s = \int_{v_0}^{v} dv \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dv}\right)^2}$$

$$= \int_{r_0}^{r} dr \sqrt{1 + \left(r\frac{dv}{dr}\right)^2}$$

Man soll die Spiralen rectificiren deren Gl.

$r = av^n$ $\quad \frac{dr}{dv} = anv^{n-1}$ folgt

$$s = \int_{v_0}^{v} dv \sqrt{a^2v^{2n} + n^2a^2v^{2n-2}}$$

$$= a\int_{v_0}^{v} v^{n-1}dv\sqrt{n^2+v^2} \qquad n^2+v^2=(z-v)^2 \text{ gesetzt}$$

$$n^2 = z^2 - 2zv \qquad v = \frac{z^2-n^2}{2z}$$

Wenn n eine ganze Zahl ist so läßt sich der Ausdruck unter dem Zeichen nach z rational machen, so daß man alle entsprechenden Spiralen rectificiren kann.

für $n=1$ $\quad r=av$

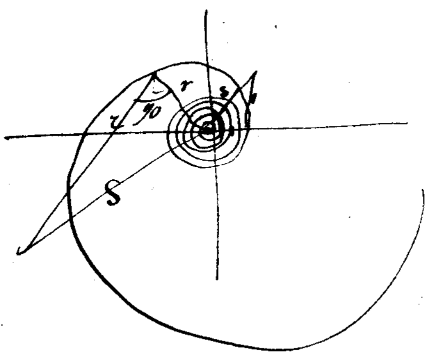
$s = a\int^{v} dv\sqrt{1+v^2}$ das unbestimmte Integral ergibt sich $\frac{a}{2}\sqrt{1+v^2} + \frac{1}{2}\,l(v+\sqrt{1+v^2}) + C$ $\quad (1+v^2)=z^2$ gesetzt.

$$s = \frac{a}{2}\left\{v\sqrt{1+v^2} + l\left(v+\sqrt{1+v^2}\right)\right\}$$

2s. Lehrsatz. Man soll die log. Spirale rectificiren.
denn da $r = e^v$ ist so ist $\frac{dr}{dv} = e^v$

$$s = \int_{r_0}^{r} dv\sqrt{e^{2v} + e^{2v}} = \sqrt{2}\int_{v_0}^{v} e^v dv$$

$$s = \sqrt{2}\,(e^v - e^{v_0})$$



u. läßt sich construiren wenn man ein rechtwinkl. △ dessen Cathete = 1 verzeichnet. Die Hypothenuse ist dann = der Bogenlänge s.
Für $v = -\infty$ u. $r = 0$ ist $s = \sqrt{2}\,e^v = r\sqrt{2}$
Construirt man also den Radius vector ein ~~gleichschenk~~ rechtwinkl. △, so ist dessen Hypothenuse = dem Bogen vom Pole gerechnet

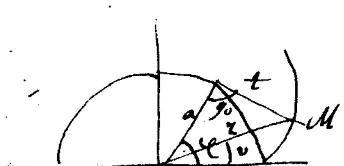
Evolvente.

Um die Gl. der Curve zu erhalten denken wir uns eine Tangente an den Kreis dessen Radius a ist gelegt u. ihre Länge so bestimmt, daß sie mit dem Bogen des Kreises übereinstimmt
der Endpkt der Tangente ist dann ein Pkt der Curve

$$t = a\varphi$$

$$r^2 = a^2 + t^2$$

$$t = a\,tg(\varphi - v) = a\varphi$$



$$r^2 = a^2 + a^2\varphi^2 \qquad \varphi = \frac{1}{a}\sqrt{r^2 - a^2}$$

$$a\,tg(\varphi - v) = a\varphi$$

$$a\,tg\left(\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a} - v\right) = a\varphi = \sqrt{r^2 - a^2}$$

$$\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a} - v = arc\,tg\left(\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi = arc\,tg\,\dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{a}{r}\right)^2}}{\frac{a}{r}} \\ \dfrac{a}{r} = \cos\theta \\ \varphi = arc\,tg(tg\,\theta) = \theta \end{array}\right.$$

$$= arc\cos\frac{a}{r}$$

$$v = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a} - arc\cos\frac{a}{r}$$

$$s = \int_{r_0}^{r} dr\sqrt{1 + \left(r\frac{dv}{dr}\right)^2}$$

fo. $\frac{dv}{dr} = \frac{r}{a\sqrt{r^2-a^2}} + \frac{-\frac{a}{r}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}} = \frac{r}{a\sqrt{r^2-a^2}} - \frac{a}{r\sqrt{r^2-a^2}}$

$$= \frac{r^2-a^2}{ar\sqrt{r^2-a^2}} = \sqrt{r^2-a^2}\cdot\frac{1}{ar}$$ folglich

$$s = \int_{r_0}^{r} dr\sqrt{1+\frac{r^2-a^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\int_{r_0}^{r} r\,dr = \frac{1}{a}\left(\frac{r^2-r_0^2}{2}\right)$$

$$= \frac{r^2-r_0^2}{2a}$$

Man soll die Curve deren Polargleichung

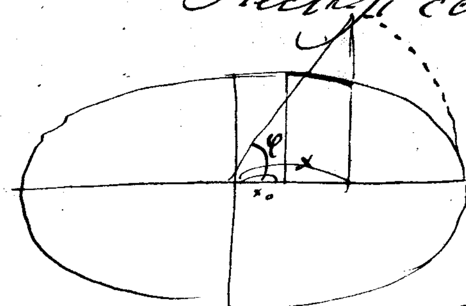
$$v = \frac{1}{2} l \frac{\sqrt{1+r^2}-\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1+r^2}+\sqrt{1-r^2}} + \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{1+r^2}{1-r^2}}$$

Man erhält dann $s = \sqrt{2}\cdot\arcsin r$

In den meisten Fällen läßt sich auf keinen Gebrauch der Polarcoordinaten zur Rectification wesentlich kommen nicht; als schönes Beispiel für Rechnungsabkürzung diene folgendes

Rectification der Ellipse.

Bekannt.



$$s = \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}}$$

Man kann dieses $\int$ durch Einführung von Polarcoordinaten, in eine der Form nach für die Rechnung bequemere Form zu bringen nämlich setzt man $x = a\cos\varphi$ so ist φ der Bogen desjenigen Winkels welchen man erhält wenn man über der selben große Achse a einen Kreis beschreibt, die zur Abscisse x gehörige Ordinate verlängert bis sie diesen Kreis schneidet u. dann diesen Punkt mit dem Mittelpunkt verbindet. dann verwandelt sich das Integral um

$dx = -a\sin\varphi\,d\varphi \quad \sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2} = a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos\varphi^2}$

$\sqrt{a^2-x^2} = a\sin\varphi \quad x_0 = a\cos\varphi_0 \quad x = a\cos\varphi$ dieß beiden Ellipsen geben die Grenzen zwischen der Integr. v. φ.

$$\frac{s}{a} = -\int_{\varphi_1}^{\varphi} \partial\varphi \sqrt{1-\varepsilon^2\cos\varphi^2}$$

$$\sqrt{1-\varepsilon^2\cos\varphi^2} = \cancel{1-\frac{\varepsilon^2}{2}}\; 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos\varphi^2 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^4}{4}\cos\varphi^4 - \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{\varepsilon^6}{6}\cos\varphi^6$$

$$\frac{s}{a} = \varphi_0 - \varphi + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi}\cos\varphi^2\,\partial\varphi + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^4}{4}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\cos\varphi^4\,\partial\varphi + \dots$$

Nach dem früheren Ergebniss ist allgemein

$$\int \cos\varphi^{2n}\partial\varphi = \frac{1}{2^{2n-1}}\left\{\frac{\sin 2n\varphi}{2n} + \frac{2n\sin(2n-2)\varphi}{2n-2} + \dots + \frac{1}{2}\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\varphi\right\}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\cos\varphi^{2n}\partial\varphi = \frac{1}{2^{2n-1}}\left\{\frac{\sin 2n\varphi - \sin 2n\varphi_0}{2n} + \frac{2n}{1}\frac{\sin(2n-2)\varphi - \sin(2n-2)\varphi_0}{2n-2} + \dots\right.$$

$$+ \dots \frac{1}{2}\,2n(2n-1)\cdots(n+1)\,\varphi - \frac{1}{2}(2n)(2n-1)\cdots(n+1)$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{1\cdot2\cdot3\cdots2n}{(1\cdot2\cdots n)(1\cdot2\cdots n)}(\varphi-\varphi_0)$$

Um hieraus den Quadranten der Ellipse zu erhalten, muss man $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ u. $\varphi = 0$ setzen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi^{2n}\partial\varphi = \frac{1\cdot2\cdot3\cdots2n}{(2\cdot4\cdots2n)(2\cdot4\cdots2n)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

u. man erhält für den verlangten $\frac{1}{4}$ Theil der Ellipse

$$s = \frac{a\pi}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\varepsilon^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\varepsilon^3\right)^2 - \dots\right)$$

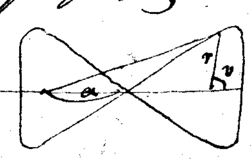
Es ist bemerkenswerth, dass die Entwickl. $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$

$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\varepsilon^2 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\varepsilon^3 + \dots$$

mit der Obigen eine nahe Verwandtschaft hat

Man soll die Lemniscado rectificiren. Die Gleichung dieser Linie ist $r^2 = 2a^2\cos 2v$ folglich

$$s = \int \partial v\sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2}$$



$$r = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2v}$$

$$r\partial v = a\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{2\sin 2v}{2\sqrt{\cos 2v}}\right) = -a\sqrt{2}\frac{\sin 2v}{\sqrt{\cos 2v}}$$

$$s = a\sqrt{2}\int\partial v\cdot\sqrt{(\cos 2v)^2 + \frac{\sin 2v^2}{\cos 2v}} \qquad s = a\sqrt{2}\int_{v_0}^{v}\partial v\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos 2v}}$$

Dieses Integral ist, wie jenes vom elliptischen Bogen nicht findbar (in endlicher Form), läßt sich aber auf den Bogen einer Ellipse reduciren. Um dies in eine Reihe zu entwickeln setze man $\cos 2v = z$, so ist

$$-2\sin 2v\cdot dv = dz \quad \text{folglich } dv = -\frac{dz}{2\sin 2v} = -\frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

Ist für $v=0$, so ist

$$s = -\frac{a}{\sqrt 2}\int_1^z \frac{z\cdot dz}{\sqrt z\sqrt{1-z^2}}$$

$$s = \frac{a}{\sqrt 2}\int_z^1 \frac{dz}{\sqrt z\cdot\sqrt{1-z^2}}$$ Man entwickle nun den Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ in eine Reihe nach Potenzen von z so ergibt sich

$$(1-z^2)^{-\frac12} = 1+\frac12 z^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot z^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}z^6+\cdots$$

folglich $$\int\frac{dz}{\sqrt z}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \int dz\left(\frac{1}{\sqrt z}+\frac12 z\sqrt z+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot z^3\sqrt z+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}z^5\sqrt z+\cdots\right)$$

$$= 2\sqrt z+\frac12\cdot\frac25 z^2\sqrt z+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac29 z^4\sqrt z+\cdots\cdots+C$$

im bestimmten Integral.

wenn die Grenzen eingesetzt.

$$s = a\sqrt2\left(1+\frac15\cdot\frac12+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac19+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac1{13}+\cdots\right)$$

$$-a\sqrt{2z}\left(1+\frac12\cdot\frac15 z^2+\frac{1\cdot3\cdot z^4}{2\cdot4\cdot9}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{z^6}{13}+\cdots\right)$$

wobei z durch v vermittelst der Gl. $\cos 2v = z$ bestimmt wird.

Wie beim rechtwinkligen Coordinatensystem so ist nicht beim Gebrauch der Polarcoordinaten das Integral für den Bogen häufig illusorisch. Wenn dies bei ersterem System nur stets eingetreten ist wenn $tg\,\theta = \frac{dy}{dx}$ durch ∞ ging oder also in jedem Punkte stattfand, dessen Tangente zur Axe der x senkrecht stand, so tritt dies beim

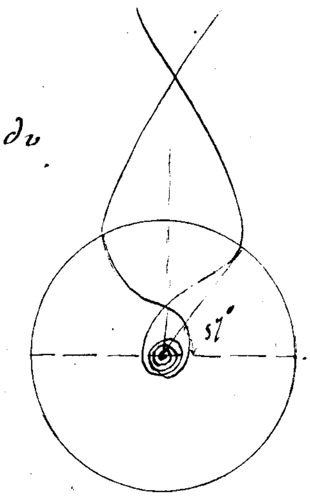
wird $\frac{dr}{dv}=\infty$, und die Fct unter dem $\int$ wird ebenfalls ∞ u. kann also [illegible] übergehen

Polarsystem ein, wenn die Tangente an die Curve auf dem durch den Berührungspunkt gelegten Kreis senkrecht steht, dessen Mittelpunkt im Pol liegt. Bedeutet $\frac{dr}{dv} = r\,tg\,\theta$ beim Polarsystem. Wird nun $\theta=\frac{\pi}{2}$ so

Man soll die Curve rectificiren, deren Gl. $r = a(v + \sqrt{v^2-1})$ ist.

$$\frac{\partial r}{\partial v} = a\left(1 + \frac{v}{\sqrt{v^2-1}}\right) = \frac{r}{\sqrt{v^2-1}}$$

$$\frac{\partial r}{r\,\partial\theta} = \frac{1}{\sqrt{v^2-1}}$$



$$s = \int \frac{r v}{\sqrt{v^2-1}} \cdot \partial v \qquad s = a\int\left\{\frac{v^2}{\sqrt{v^2-1}} + v\right\}\partial v.$$

$$s = \frac{a v^2}{2} + a\int\frac{v^2 \cdot \partial v}{\sqrt{v^2-1}}$$

$$\int\frac{v^2 \partial v}{\sqrt{v^2-1}} = v\sqrt{v^2-1} - \int \partial v \sqrt{v^2-1}$$

$$\int\frac{v^2 \partial v}{\sqrt{v^2-1}} = \int \sqrt{v^2-1} \cdot \partial v + \int\frac{\partial v}{\sqrt{v^2-1}}$$

addirt u. durch 2 div.: $= \frac{1}{2}\left\{v\sqrt{v^2-1} + \int\frac{\partial v}{\sqrt{v^2-1}}\right\}$

Um das letzte Integral zu erhalten setzt man $v^2-1 = (z-v)^2$

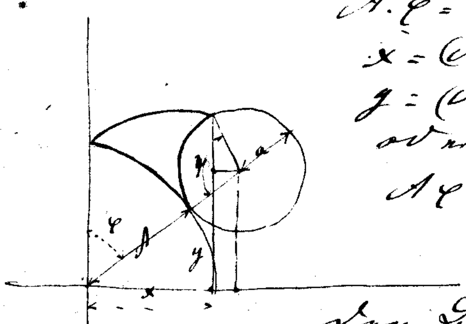
$\int\frac{\partial v}{\sqrt{v^2-1}} = lz$ und alles zusammengenommen

erhält man. $s = \frac{a}{2}\left(v^2 + v\sqrt{v^2-1} + l(v+\sqrt{v^2-1})\right)$

Da bei $v=1$ $\frac{\partial r}{r\,\partial\theta} = \infty$ wird, so wird die Function unter dem J. ∞ groß u. man darf daher nicht aus der vorigen Formel den Bogen, welcher zwischen einem größern u. kl. Werthe v. r als a den Bogen mißt berechnen

Man soll die Epicycloide rectificiren.

Zu der Bedingung der Curven hat man folgende 3 Gl.



$$A \cdot \varphi = a\psi$$
$$x = (A+a)\sin\varphi - a\cos(\psi - (90-\varphi))$$
$$y = (A+a)\cos\varphi + a\sin(\psi - (90-\varphi))$$

oder also

$$A\varphi = a\psi \qquad x = (A+a)\sin\varphi - a\sin(\psi+\varphi)$$
$$y = (A+a)\cos\varphi \mp a\cos(\psi+\varphi)$$

Eliminirt man aus diesen Gl. den Bogen $\psi = \frac{A}{a}\varphi$, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} x &= (A+a)\sin\varphi - a\sin\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right) \\ y &= (A+a)\cos\varphi - a\cos\left(\frac{A+a}{a}\cdot\varphi\right) \end{aligned}\right\} \text{Gl. der Cycloide.}$$

Differenzirt man diese Gl. so ergibt sich

$\partial x = (A+a)(\cos\varphi - \cos\frac{A+a}{a}\varphi)\,\partial\varphi$

$\partial y = -(A+a)(\sin\varphi - \sin\frac{A+a}{a}\varphi)\,\partial\varphi$

Da nun $s = \int\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$ ist, so ist

$$s = (A+a)\int\partial\varphi\sqrt{2 - 2(\cos\varphi\cdot\cos\frac{A+a}{a}\varphi + \sin\varphi\sin\frac{A+a}{a}\cdot\varphi)}$$

Die Summe in der Klammer ist $= \cos(\frac{A+a}{a}\varphi - \varphi) = \cos\frac{A}{a}\varphi$ folglich wird

$s = (A+a)\sqrt{2}\int\partial\varphi\sqrt{1-\cos\frac{A}{a}\varphi}$ oder da $1-\cos\frac{A}{a}\varphi = 2\sin\frac{A}{2a}\varphi^2$ ist

so folgt. $s = 2(A+a)\int\sin\frac{A}{2a}\varphi\,\partial\varphi$ od. wenn bestimmt integrirt

$s = -\frac{4(A+a)a}{A}\cos\frac{A}{2a}\varphi + \text{Const.}$

Zählt man den Bogen von $\varphi = 0$ an, so hat man $s = 0$ für $\varphi = 0$ folglich $0 = -\frac{4a\cdot(A+a)}{A} + C$ u. wenn man die Const eliminirt $s = \frac{4a(A+a)}{A}(1-\cos\frac{A}{2a}\varphi)$ also gleich

$$s = \frac{8a(A+a)}{A}\cdot\sin^2(\frac{A}{4a}\varphi)$$

~~Da s~~ Die Fct. erreicht den größten Werth bei denjenigen Werthen von φ, welche dem Ausdr. $\frac{A}{2a}\varphi$ die Werthe $0, \pm\pi$, $0, \pm 2\pi$. geben, und ändert dabei sein Zeichen. Man darf also nur bis diese Werthe hin den Bogen nach obiger Formel messen. Diese Form gewährt nachher jedesmal einer Berücksichtigung der obern Rücksicht Wenn man $A = \infty$ setzt.

Da $A\varphi = a\psi$, so kann man setzen

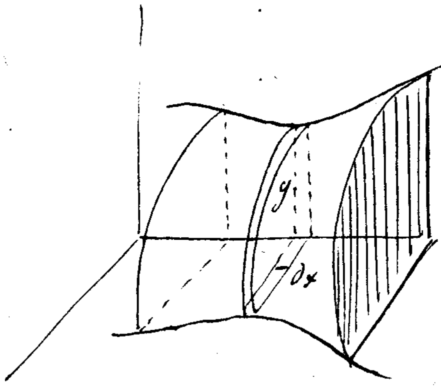
$s = \frac{8a(A+a)}{A}\sin^2\frac{\psi}{4}$. Um hieraus den Bogen für die Cycloide zu erhalten bemerkt man, daß $\frac{8a(A+a)}{A} = 8a$ folglich $s = 8a\cdot(\sin^2\frac{\psi}{4}) = 8a\sin^2\frac{\psi}{4}$.

Um einen ganzen Bogen der Epicycloide zu erhalten setze man $\psi = 2\pi$ u. ihr. $s = \frac{8a(A+a)}{A}$ und für die gem. Cycl. $s = 8a$.

(Lösz. $y = \frac{1}{4}(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x})$ ist $\operatorname{arc}\sin x + y$)

Cubatur der Rotationsflächen

Bezeichnet $y = f(x)$ die Ordinate einer um die Axe x rotirenden Curve und verlangt man den zwischen 2 auf dieser Axe senkrechten Parallelschnitten enthaltenen cub. Raum so kann man diesen Raum durch ∞ viele equidistante Ebenen geschnitten denken und die zwischen ihnen



enthaltenen Räume addiren. Diese lassen sich als Cylinder ansehen, deren Basis den Radius y und deren Höhe dx ist. Der Inhalt dieser Cylinder wird sein

$$\pi y^2 dx = \pi f(x)^2 \cdot dx$$

und um den Raum zwischen den Grenzen x_0 u. x ~~zu~~ zu finden muss man alle diese Inhalte summiren, was sich auf die Bildung des Integrals $\int_{x_0}^{x} \pi f(x)^2 dx$ reducirt, so dass man hat:

$$K = \pi \int_{x_0}^{x} f(x)^2 dx$$

Wir setzen voraus die rotirende Curve habe eine Doppelordinate.

Beispiel. Man soll das Rotationsellipsoid ~~[illegible]~~ cubiren.

Hier ist $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$$K = \frac{b^2}{a^2}\pi \int_{x_0}^{x} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{b^2}{a^2}\pi \cdot \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)$$

u. Grenzen gen. $K = \frac{b^2}{a^2}\pi\left(a^2 x - \frac{x^3}{3} - a^2 x_0 + \frac{x_0^3}{3}\right)$

$$K = \frac{b^2}{a^2}\pi\,(x - x_0)\left(a^2 - \frac{x^2 + x x_0 + x_0^2}{3}\right)$$

da $x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)$

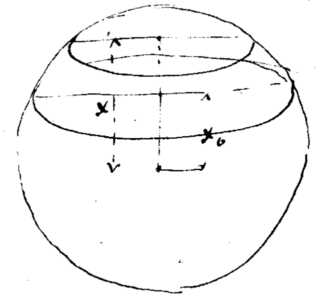
Um den ganzen Inhalt zu finden ist $x_0 = -a$ u. $x = +a$

folglich $K = \frac{b^2 \pi}{a^2}(2a)\left(a^2 - \frac{a^2 - a^2 + a^2}{3}\right) = \frac{4 b^2 \pi \cdot a}{3}$

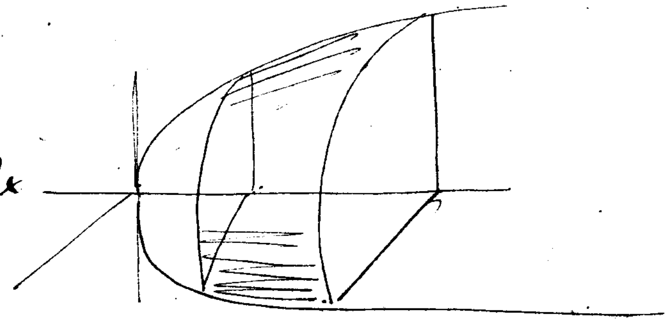
Man erhält hieraus auch den cubischen Raum für den Zone einer Kugel.

Setzt man nämlich $b=a$, so erfolgt

$$K = \frac{\pi}{3}(x-x_0)\left\{3a^2-(x^2+xx_0+x_0^2)\right\}$$



Man soll den Inhalt des Umdrehungsparaboloids finden.



Paraboloid

Hier ist $K=\pi\int_{x_0}^{x} px\,dx$

$$K=\frac{\pi}{2}p(x^2-x_0^2)$$

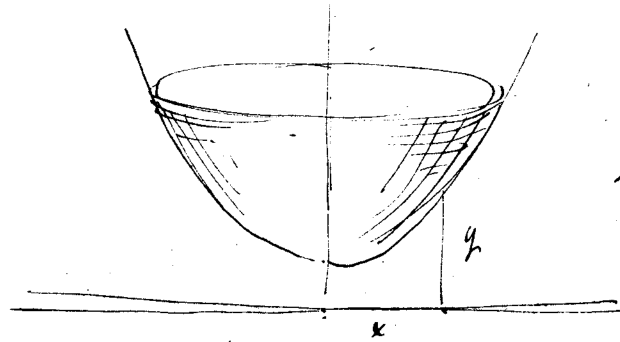
Zählt man vom Scheitel an so ist $x_0=0$

$$K=\frac{\pi p}{2}x^2.$$

Man soll den Raum finden, der durch die Umdrehung der Kettenlinie entsteht. Ihre Gl. ist.

$$y=a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2} \qquad K=\pi\int_{y_0}^{y}x^2\,dy$$

$$dy=\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$



$$K=\frac{\pi}{2}\int_{y_0}^{y}x^2\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$$

$$\int x^2 e^{\frac{x}{a}} = ax^2e^{\frac{x}{a}}-2a\int xe^{\frac{x}{a}}dx$$

$$\int xe^{\frac{x}{a}}dx = axe-a\int e^{\frac{x}{a}}dx=(ax-a^2)e^{\frac{x}{a}}$$

$$\int x^2e^{\frac{x}{a}}dx = e^{\frac{x}{a}}(ax^2-2a^2x+2a^3)+\text{Const.}$$

$\int x^2\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$ und $K=\frac{a\pi}{2}\cdot\left\{e^{\frac{x}{a}}(x-a)^2+e^{-\frac{x}{a}}(x+a)^2+a^2\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\right\}-2\frac{a^3}{\pi}$

für $x=a$ ~~wird~~ $K=a^2\pi.$

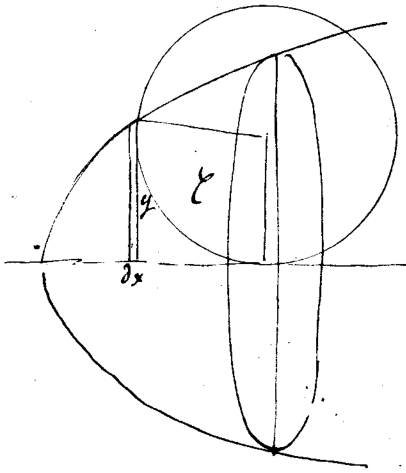
Man soll den Körper finden, wenn eine Cycloide um ihre Basis rotirt.

$$y = a(1-\cos\varphi) \quad x = a(\varphi - \sin\varphi)$$

$$\partial x = a(1-\cos\varphi\,\partial\varphi)$$

$$y^2\partial x = a^3(1-\cos\varphi)^3\partial\varphi$$

$$K = a^3\pi\cdot\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^3\partial\varphi$$



$$(1-\cos\varphi)^3 = 1 - 3\cos\varphi + 3\cos\varphi^2 - \cos\varphi^3$$

$$\cos\varphi^2 = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\varphi) = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\frac{8\cos\varphi^3}{2} = \frac{e^{3\varphi\sqrt{-1}} + e^{-3\varphi\sqrt{-1}}}{2} + 3\left(\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}\right)$$

$$\cos\varphi^3 = \tfrac{1}{4}(\cos 3\varphi + 3\cos\varphi)$$

$$(1-\cos\varphi)^3 = 1 - 3\cos\varphi + \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2}\cos 2\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 3\varphi - \tfrac{3}{4}\cos\varphi$$

$$= \tfrac{5}{2} - \tfrac{15}{4}\cos\varphi + \tfrac{3}{2}\cos 2\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 3\varphi$$

$$\int(1-\cos\varphi)^3\partial\varphi = \tfrac{5}{2}\varphi - \tfrac{15}{4}\sin\varphi + \tfrac{3}{4}\sin 2\varphi - \tfrac{1}{12}\sin 3\varphi + \text{Const.}$$

Zwischen Grenzen o u. 2π.

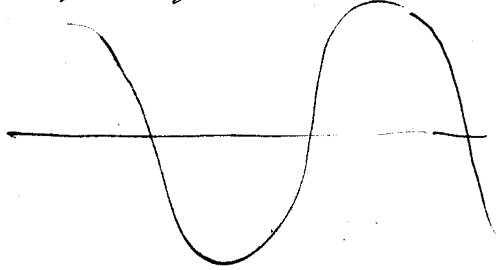
$K = 5a^3\pi^2$ für Ellipsoid ist $\frac{4}{3}\pi\alpha\beta^2 = K_1$

dann ist $\alpha = a\pi$ $\beta = 2a$ dann ist

$K_1 = \frac{16}{3}a^3\pi$. Also verhalten sich.

$K : K_1 = 15 : 16.$

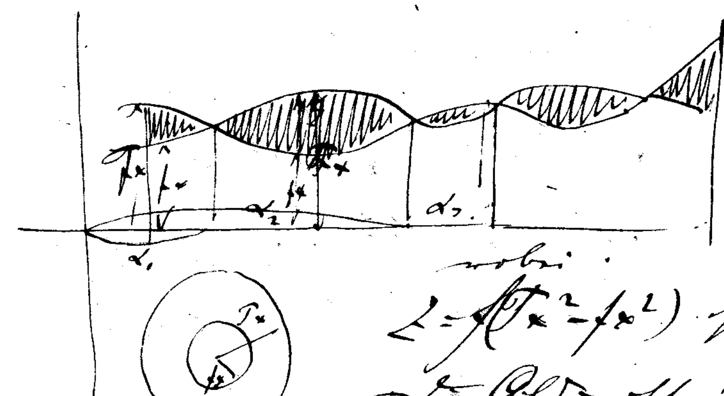
Wenn die Curve innerhalb der Integrationsgrenze ein oder mehrere Mal die Abscissenachse schneidet ohne dass die Ordinaten u. also solche Räume verschwinden. So gilt die allgemeine Formel.



$K = \pi\int_{x_0}^{x} y^2\partial x$ immer noch

Wenn der Inhalt nur gleich gefunden werden welcher Körper durch Rotation einer sich schneidender Curven erzeugt wird, so ist auf folgende Art zu verfahren

Man suche die Werthe $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ der Wurzeln der Gl. $F(x)-f(x)=0$ so ist:

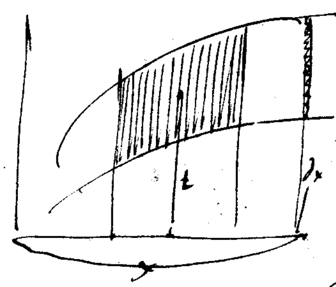


$$K=\pi\left(\int_{x_0}^{\alpha_1} z\,dx-\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} z\,dx+\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} z\,dx \ldots\right)$$

wobei

$$z=(Fx^2-fx^2)\ \text{ist.}$$

Die Guldinsche Regel drückt sich auf folgende Weise leicht aus:



t sei der Abstand des Schwerpunktes der rotirenden Fläche von der Axe. Betrachtet man den unendlich schmalen Streifen zwischen x u. $x+dx$, so ist sein Inhalt derselbe $=(Fx-fx)\,dx$ und der Abstand seines Schwerpunkts von der Axe $=\frac{1}{2}(F(x)+f(x))$ u. sein Moment

$\frac{1}{2}(F(x)^2-f(x)^2)\,dx$ u. die Summe aller Momente

$$=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(F(x)^2-f(x)^2)\,dx$$ u. der Inhalt der Fläche ergiebt $$\int_{x_0}^{x}(F(x)-f(x))\,dx$$ u. folglich

$$t=\frac{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(F(x)^2-f(x)^2)\,dx}{\int_{x_0}^{x}(F(x)-f(x))\,dx}=\frac{K}{2\pi S}$$ wo S der Flächeninhalt

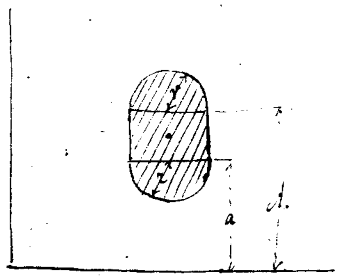
$\therefore$

$$K=2\pi S t=2\pi t\cdot S$$

Wenn die Summe sich innerhalb der Integrationsgrenzen schneidet, so muß man für die Berechnung der Momente sowohl als der Schwerpunkte das Integral abtheilen, bei den Punkten zwischen $F(x)-f(x)=0$ wird. Und die Zeichen für d. einzelnen Integrale so nehmen, daß man ihre absolute Summe erhält.

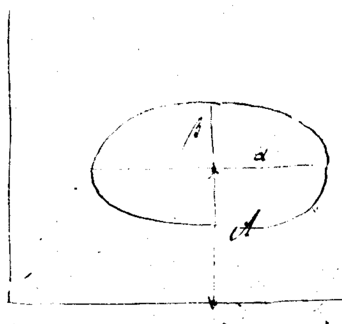
$K = 2\pi t \cdot S$, wo S der Fl. der rotirenden Curve u. t die Absc. seines Schwerpunkts von der Abscissenaxe ist.

Beispiele.



$$t = \tfrac{1}{2}(A+a)$$
$$S = \pi r^2 + (A-a)2r \quad \text{folglich}$$
$$K = 2\pi \cdot \tfrac{1}{2}(A+a)(\pi r^2 + (A-a)2r)$$
$$K = \pi(A+a)(\pi r^2 + 2r(A-a)$$
$$= \pi r(A+a)(\pi r + 2(A-a)$$

für die Ellypse.

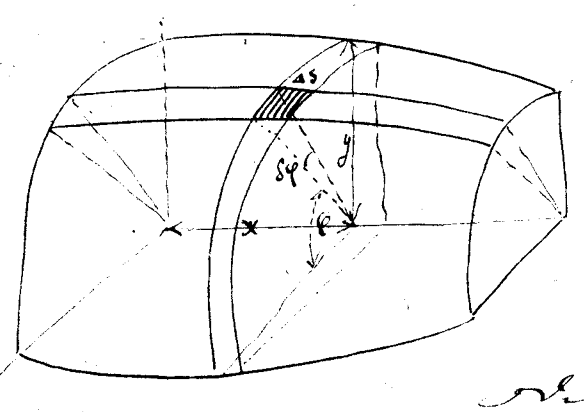


$$t = A.$$
$$S = \alpha\beta\pi$$
$$K = 2\pi^2 \alpha\beta . A.$$

Wie complanirt man die Rotationsflächen?

Complanation der Rotationsfläche.

Darunter verstehen wir die Grenze, welcher sich die Summe der Seitenflächen eines ein od. umbeschriebenen Polyeders ohne Ende nähert, während man die Anzahl seiner Eckpunkte ohne Ende wachsen läßt. Die Rotationsflächen ist es am bequemsten die Eckpunkte des Polyeders so zu bestimmen, daß man ∞ viele equidist. Meridiane u. Parallelschnitte durch die Fläche legt, so daß man ∞ viele kl. Vierecke erhält, deren Summen man folgt bestimmen werden kann.



Die Dimensionen der ∞ kl. Vierecke sind: ΔS u. $y\Delta\varphi$ folgl. $J = y.\Delta S.\Delta\varphi$. Nun den Differentialen

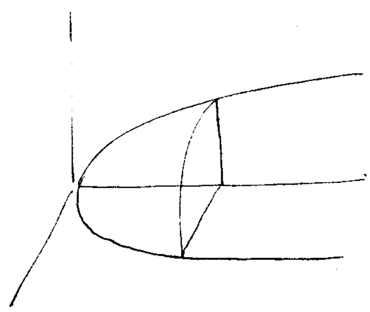
Streifen v. $\varphi=0$ bis $\varphi=\varphi$ zu erhalten muss man nach φ integriren wobei ja ΔS constant bleiben. Das Integral ist $y.\Delta S.\varphi$. Summirt man alle Streifen von $x=x_0$ bis $x=x$ so ist der Inhalt der krum. fl. Rechtecke φ

$$S=\varphi\cdot\int_{x_0}^{x} y.\Delta S. = \varphi\int_{x_0}^{x} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,.\,dx$$

für $\varphi=2\pi$ erhält man die Oberfl. einer Ganz-

$$= S = 2\pi\int_{x_0}^{x} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,.\,dx$$

Beispiele. 3) Parabolischer Conoid.



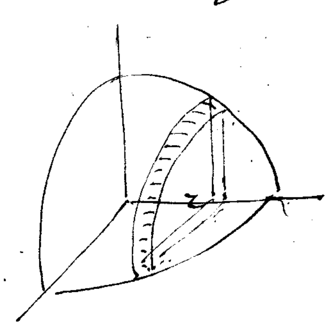
$$fx=\sqrt{px}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}} \qquad S=2\pi\int_{0}^{x}\sqrt{px}\sqrt{1+\frac{p}{4x}}\,.\,dx$$

$$=2\pi\sqrt{p}\int_{x_0}^{x}dx\sqrt{x+\frac{p}{4}} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{p}\left(x+\frac{p}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{4\pi}{3}\sqrt{p}\left(\left(x+\frac{p}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{p}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

Kugel. $\quad fx=\sqrt{r^2-x^2} \qquad f'x=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$



$$S=2\pi\int_{x_0}^{x}\sqrt{r^2-x^2}\,.\,\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,.\,dx$$

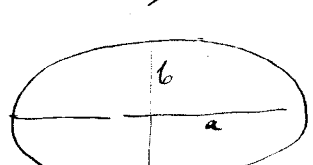
$$S=2\pi r.\int_{x_0}^{x}dx = 2\pi r.(x-x_0)$$

für die ganze Kugel $x=r \quad x_0=-r$

$$S=4\pi r^2$$

Man soll die Oberfl. eines Rotationsellipsoids finden

$$f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$



$$f'(x)=-\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$S=2\pi.\int\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2-x^2}} \quad \text{unbestimmt.}$$

$$S=2\pi.\frac{b}{a^2}\int dx\sqrt{a^4-a^2x^2+b^2x^2}=\frac{2\pi b}{a^2}\int dx\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}$$

Es hängt nun wesentlich davon ab, ob $a \gtrless b$ oder also ob man ein Ellypsoid od. Sphäroid erhält, muß man sich entscheiden, um eine reale Form für das Integral zu erhalten

1. Ellypsoid od. $a>b$

Es sei $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\varepsilon^2$ u. man hat.

$$S = 2\pi \frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}$$

da nun für α neg:

$$\int dx\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma} = \frac{\alpha x+\beta}{2\alpha}\cdot\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma} +$$

$$+\frac{\beta^2-\alpha\gamma}{2\alpha\sqrt{-\alpha}}\cdot\arcsin\frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}$$

für $\beta=0$ $\alpha=-\varepsilon^2$, $\gamma=a^2$ folgt.

$$S = 2\pi\frac{b}{a}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}+\frac{a^2}{2\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right\}+C$$

Für das ganze Ellypsoid muß man nehmen von $x=-a$ bis $x=+a$ u. man hat.

$$S = 2\pi\frac{b}{a}\left\{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right\}$$

$$=2\pi ab\left\{\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right\}$$

für die Kugel ergibt sich: für $\varepsilon=0$, u. $a=b$

wobei $\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}=1$ wird.

$$S=4\pi a^2$$

2. Sphäroid $b>a$

$$\frac{b^2-a^2}{a^2}=\varepsilon^2$$

$$S=2\pi\cdot\frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2+\varepsilon^2x^2}$$

Da nun für α positiv $\int dx\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}=$

$$\frac{\alpha x+\beta}{2\alpha}\cdot\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}+\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\cdot\lg\left\{\frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\right\}$$

$\alpha=\varepsilon^2$ $\beta=0$ $\gamma=a^2$

$$S=2\pi\frac{b}{a}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2+\varepsilon^2x^2}+\frac{a^2}{2\varepsilon}\lg\left\{\frac{\varepsilon^2x}{\varepsilon}+\sqrt{a^2+\varepsilon^2x^2}\right\}\right\}+C$$

$$S=2\pi\frac{b}{a}\left(a^2\sqrt{1+\varepsilon^2}+\frac{a^2}{2\varepsilon}l\left\{\frac{\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2}}{-\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right\}\right)$$ oder

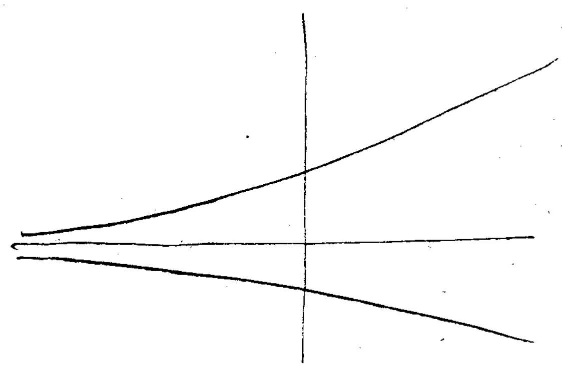
$$S=2\pi ab\left(\sqrt{1+\varepsilon^2}+\frac{l(\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2})}{\varepsilon}\right)$$

Für die Kugel ist $\varepsilon=0$ wofür

$$\frac{l(\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2})}{\varepsilon} = \frac{1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}}{\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2}} : \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1$$

$S = 4\pi a^2.$

Es drehe sich die log. Curve um ihre Axe.



$$y = a e^{\frac{x}{a}}$$

$$y' = e^{\frac{x}{a}}$$

$$S = 2\pi \int a e^{\frac{x}{a}} \sqrt{1+e^{\frac{2x}{a}}}\,.\,dx$$

$$e^{\frac{x}{a}} = z. \qquad e^{\frac{x}{a}}.dx = a\,dz$$

$$S = 2\pi \int a e^{z} \sqrt{1+z^2}\,.\,dx = 2\pi a^2 \int dz \sqrt{1+z^2}$$

$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 1$

$$\int dz \sqrt{1+z^2} = \frac{z}{2}\sqrt{1+z^2} + \frac{1}{2} l(z+\sqrt{1+z^2})$$

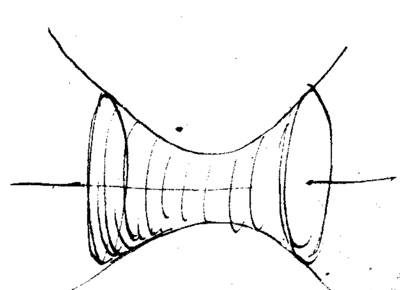
folglich ist $S = a^2\pi\left(z\sqrt{1+z^2} + l(z+\sqrt{1+z^2}\right) + \text{Const.}$

von $x = -\infty$ bis $x = 0$

ist $z = 0$ bis $z = 1$

$$S = a^2\pi\left(\sqrt{2} + l(1+\sqrt{2})\right)$$

Die Kettenlinie rotire um die Axe x man soll die Oberfl. eines Abschnitts finden.



$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

$$y = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

$$y' = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

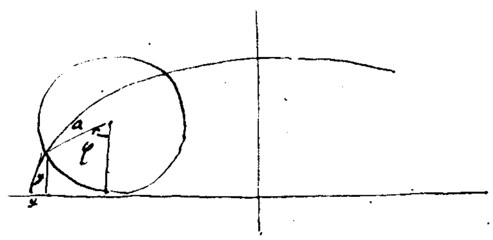
$$S = a\pi \int_{x_0}^{x} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\sqrt{1+\frac{e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}}{4}}\,.$$

$= \frac{a\pi}{2}\int_{x_0}^{x}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2.\,dx$ im bestimmt integrirt erhält man: $S = \frac{a\pi}{2}\left\{\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right\} + C$

für $x_0 = 0$ ist:

$$S = \frac{a\pi}{4}\left\{a\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right) + 4x\right\}$$

Die Cycloide rotiren um ihre Basis.



$$y = a(1-\cos\varphi) \qquad x = a(\varphi - \sin\varphi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$$

$$S = 2\pi\int a(1-\cos\varphi)\sqrt{1+\frac{\sin\varphi^2}{(1-\cos\varphi)^2}}\, a(1-\cos\varphi)\,\partial\varphi$$

$$= 2\pi a^2\int(1-\cos\varphi)\sqrt{2-2\cos\varphi}\,\partial\varphi$$

$$= 2a^2 2\pi\int 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi\,\partial\varphi$$

um bestimmtes Integral zu erhält man, da

$$= 8a^2\pi\int \sin\tfrac{1}{2}\varphi^3\,\partial\varphi$$

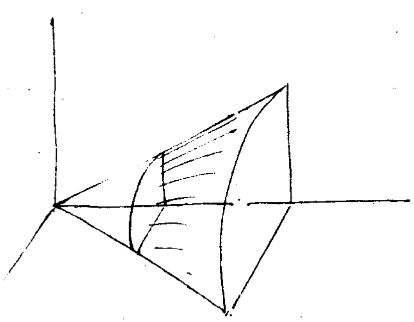
$$\left\{\begin{array}{l} \sin\varphi = \dfrac{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \\ \sin\varphi^3 = \dfrac{1}{-2^2}\left\{\dfrac{e^{3\varphi\sqrt{-1}} - e^{-3\varphi\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} - 3\,\dfrac{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right\} \\ \sin\varphi^3 = -\dfrac{1}{2^2}(2\sin 3\varphi - 3\sin\varphi),\ \sin\tfrac{1}{2}\varphi^3 = -\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{3}{2}\varphi + \tfrac{3}{4}\sin\tfrac{1}{2}\varphi \end{array}\right\}$$

$$S = 8a^2\pi\left\{\tfrac{2}{3}\cos\tfrac{3}{2}\varphi - 6\cos\tfrac{1}{2}\varphi\right\} + C$$

u. für die ganze Oberfl. $0, \ldots, 2\pi$, integr.

$$S = \frac{32}{3}a^2\pi.$$

Complan. des Kegels.



$$y = ax.$$

$$S = 2\pi\int_{x_0}^{x} ax\sqrt{1+a^2}\,\partial x$$

$$= 2\pi\frac{a\sqrt{1+a^2}}{2}\left\{x^2 - x_0^2\right\} = \pi a\sqrt{(1+a^2)}(x^2 - x_0^2)$$

für $x_0 = 0$

$$S = \pi a\sqrt{(1+a^2)}\,x^2$$

Sind $x, y, x_0 y_0$ gegeben.
Setzt man $y = ax$ $y_0 = ax_0$ folgt $y = \frac{y_0}{x_0}\cdot x$

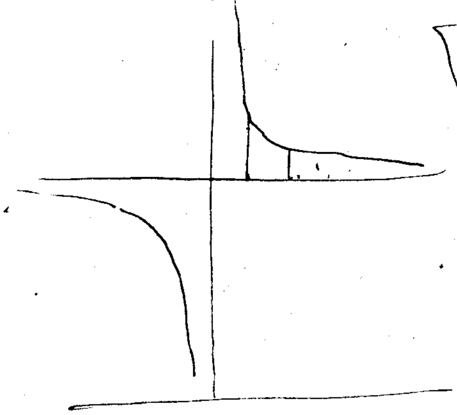
$$a = \frac{y_0}{x_0} \qquad S = \pi\frac{y_0}{x_0}\sqrt{x_0^2+y_0^2}\left\{x^2 - x_0^2\right\}\cdot\partial x$$

Läßt man die gleichseitige Hyperbel um ihre Asymptote rotiren, dann geht $y = \frac{q^2}{x}$ über u. man erhält:

$$S = 2\pi q^2\int_{x_0}^{x}\frac{\partial x}{x}\sqrt{1+\frac{q^4}{x^4}}$$

$$S = 2\pi q^2 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^3}\sqrt{x^4+q^4}$$

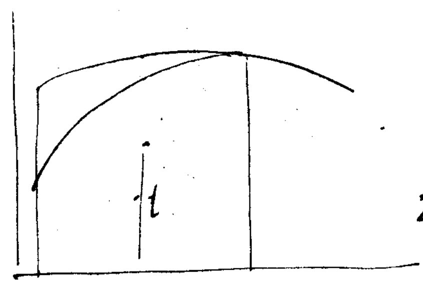
welches Integral sich rational darstellen läßt wenn man wechselt: $x^4+q^4 = (z-x^2)^2$



Die Guldinsche Regel (geometrische Bestimmung der Oberfläche)

Es sei t der Abstand des Schwerpunktes der rotierenden Curve von der Axe, das Moment eines Bogenelementes ds ist $y\,.ds$ und die Summe aller Elemente ist

$\int_{x_0}^{x} y\,ds$. Die Länge des Bogens ist $\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ mithin



$$t = \frac{\int_{x_0}^{x} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.dx}{\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

oder:

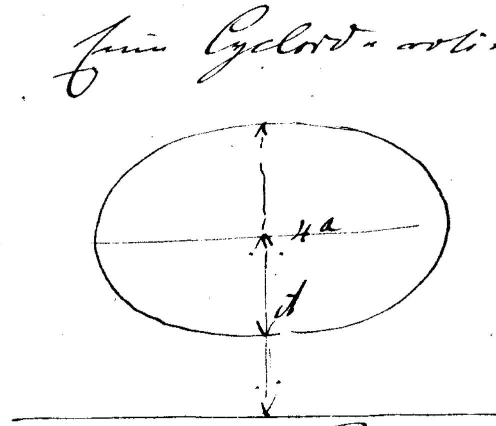
$$t = \frac{S}{2\pi . s}$$ wo S die Oberfläche erzeugt wird bedeutet

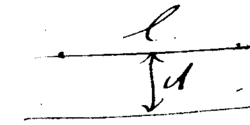
oder $S = 2\pi s t = 2\pi t . s$

Eine Cycloide rotirt um eine Axe

$s = 16a$

$S = 32\pi a . t$





Rotirt eine Linie so ist

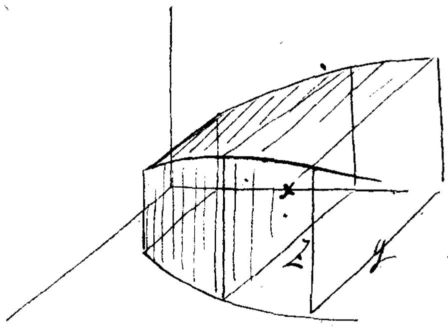
$S = 2\pi . t . l$

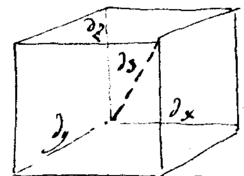
Ueber die Curve im Raume

Rectification

Bekanntlich sind zur Bestimmung einer solchen Curve 2 Gl. nöthig u. betrachtet man eine einzige der abhängigen neben der unabh. x durch deren Annahme y u. z bestimmt sind so daß man hat $y = \varphi(x)$ u. $z = \psi(x)$ in der Curve Gl.

Kann man auch die Länge der Curve ausdrücken, welche durch Projection der räumlichen Curve auf die Ebene x, y u. x z entsteht. Die Sehnen sind kleinen Bogenelemente der Curve im Raum offenbar die Diagonale der Segmente δy, δx, δz der drei Coordinaten, so daß man hat.





$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$$

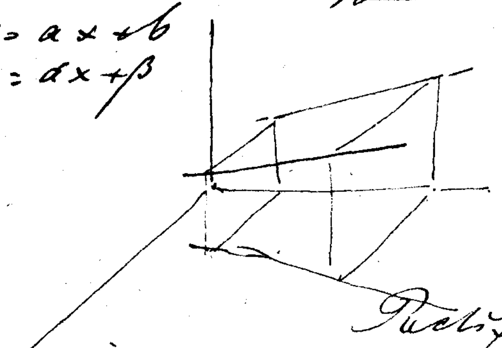
$$\partial s = \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$ als für δx ∞ kl.

werden ∂s, wenn man integrirt.

$$s = \int_{x_0}^{x} \partial x \sqrt{1 + \varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2}.$$

Beispiel. Die beiden Projectionsgeraden seien

$y = ax + b$
$z = \alpha x + \beta$

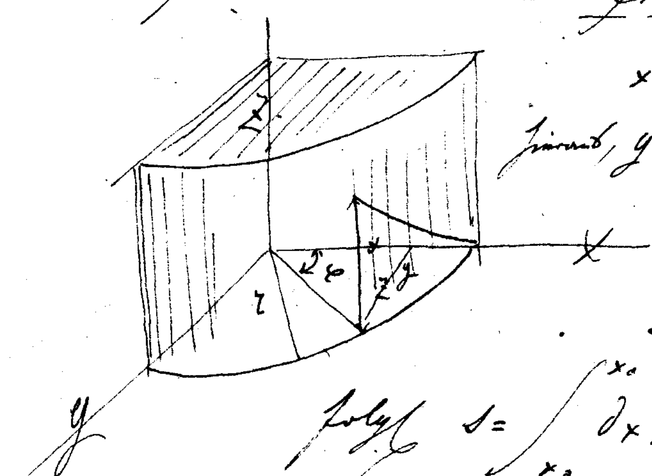


$$y' = a \qquad z' = \alpha$$

$$s = \int_{x_0}^{x} \partial x \sqrt{1 + a^2 + \alpha^2}$$

$$s = (x - x_0)\sqrt{1 + a^2 + \alpha^2}$$

Rectification der Schraubenlinie.



$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = \alpha r \varphi$$

hieraus $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $\quad z = \alpha r \cdot \arccos \frac{x}{r}$

folglich $y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

$$z' = -\alpha r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

folglich $s = \int_{x_0}^{x_0} \partial x \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} + \frac{\alpha^2 r^2}{r^2 - x^2}}$

$$s = r\sqrt{1+\alpha^2} \int_{x_1}^{x_0} \partial x \sqrt{\frac{\partial x}{\sqrt{r^2 - x^2}}} = s = r\sqrt{1+\alpha^2}\left(\arcsin \frac{x_0}{r} - \arcsin \frac{x_1}{r}\right)$$

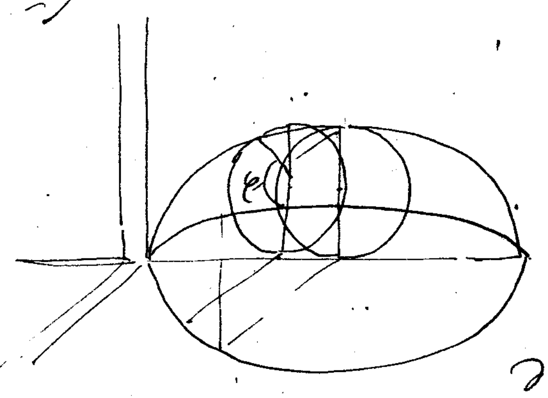
für $x_1 = r$ ist

$$s = r\sqrt{1+\alpha^2}\left(\arcsin \frac{x}{r} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= z\sqrt{1+\alpha^2} \cdot \arccos \frac{x}{r} = z\sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}}$$

Die [illegible] der Projection einer [illegible] Cycloide

$$l = \int_{x_0}^{x} \partial x \sqrt{1+\varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2} \qquad x = a(\varphi - \sin\varphi)$$



$$y = a(1-\cos\varphi)$$

$$z = a(1-\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$$

$$\partial x = a(1-\cos\varphi)\,\partial\varphi$$

$$l = a\int(1-\cos\varphi)\,\partial\varphi \sqrt{\frac{(1-\cos\varphi)^2 + 2\sin\varphi^2}{1-\cos\varphi}}$$

$$l = a\int\partial\varphi\sqrt{1-2\cos\varphi+2\sin\varphi^2+\cos\varphi^2+1}$$

$$= a\int\partial\varphi\sqrt{2-2\cos\varphi+\sin\varphi^2}$$

$$= a\int\partial\varphi\sqrt{4\sin\tfrac12\varphi^2+\sin\varphi^2}$$

$$= 2a\int\sin\tfrac12\varphi\sqrt{1+\cos\tfrac12\varphi^2}\,\partial\varphi$$

$\sin\varphi = 2\sin\frac12\varphi\cos\frac12\varphi$

$\sin\varphi^2 = 4(\sin\frac12\varphi\cdot\cos\frac12\varphi)^2$

$\cos\frac12\varphi = t$

$\sin\frac12\varphi\,\partial\varphi = -2\,\partial t$

$$l = -4a\int\partial t\sqrt{1+t^2}$$

$$l = -4a\left\{\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}+\frac12\, l\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right\}$$

für $\varphi = 0$ ist $t = 1$ für $\varphi = 2\pi$ ist $t = -1$

$$l = +2a\left\{2\sqrt2 + l\,\frac{1+\sqrt2}{-1+\sqrt2}\right\} = 4a\left\{\sqrt2 + l(1+\sqrt2)\right\} = 9{,}18\,a$$

Cycloide $= 8a$

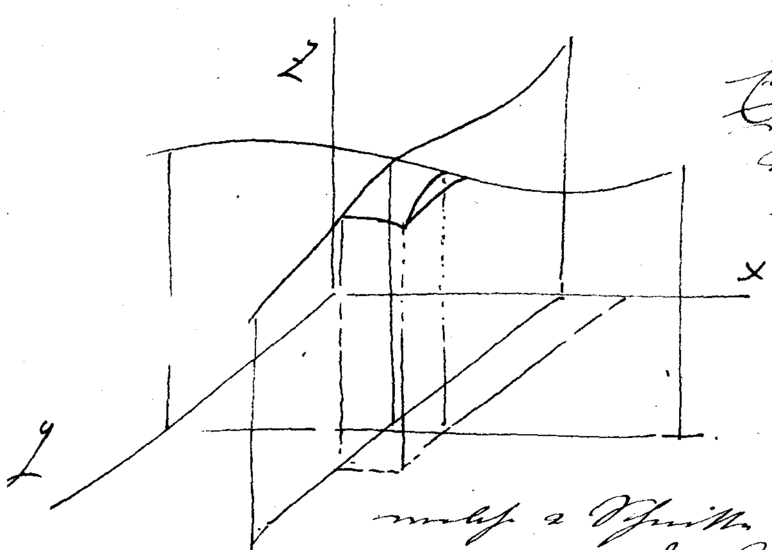
Ebenso ist zu untersuchen, wenn die beiden Projectionen

$y = ax^2+2bx+c \qquad z = \alpha x^2+2\beta x+\gamma$ so erhält man

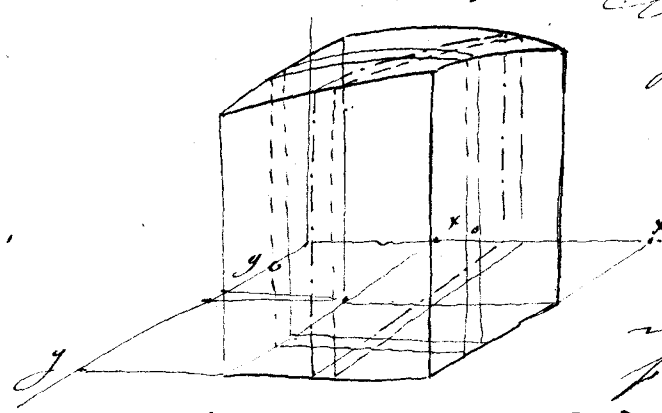
$$l = \int_{x_0}^{x}\partial x\sqrt{4(a^2+\alpha^2)x^2+8(ab+\alpha\beta)x+1+4(b^2+\beta^2)}$$

Ausmessung beliebiger kr. Oberflächen

Die Gl. d. Fl. sei $z = f(x,y)$



Es sei $z = f(x,y)$ die Gl. der gegebenen Oberfläche. Um sich von ihrer Gestalt eine klare Auffassung zu bilden, betrachte man für ein bestimmtes x, alle Werthe v. z, welche sich ergeben wenn man für y alle möglichen Werthe setzt u. umgekehrt. So erhält man 2 Curven welche 2 Schnitte // den beiden Ebenen xz u. yz in der Oberfl. machen, und welche Schnitte Parallelschnitte genannt werden. Das vorausgeschickte entsteht die Frage, wie man den cubischen Inhalt für den Raum, 1. zwischen einem Rechteck der xy Ebene und der Oberfläche, 2 zwischen einer Curve in der xy Ebene u. – – u. 3. zwischen 2 beliebigen Oberflächen.



Man denke sich für eine zwischen x_0 u. x liegende Abscisse x einen Parallelschnitt zu yz geführt, dessen Inhalt berechnet, sei dieser $\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy$ und dieses mit dx multiplicirt, so erhält man den Inhalt einer dünnen Platte $= dx\int_{y_0}^{y} f(x,y)\cdot dy$ u. nimmt alle diese Platten zusammen so erhält man den ganzen Raum $K = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy$. Verfährt man umgekehrt, indem man zuerst von einem Parallelschnitt der Ebene der xz ausgeht, so wird man ebenso erhalten:

$$K = \int_{y_0}^{y} dy \int_{x_0}^{x} f(x,y)\cdot dx\,,$$ woraus folgt, dass

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy = \int_{y_0}^{y} dy \int_{x_0}^{x} f(x,y)\cdot dx$$

Dieser Schluss drückt den bekannten sehr wichtigen Satz aus, dass, wenn eine function nach 2 unabhängigen (von einander)

Größen zwischen ganz von einander unabhängigen Grenzen ausgedehnt werden soll, die Ordnung, in welcher dies geschieht willkürlich ist.
Dieser Satz ist für die Theorie der bestimmten Integrale von großer Bedeutung.
z.B. Bekanntlich ist

1) $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cdot\cos(yx)\cdot dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}$$

Integrirt man diese Gl. nach y zwischen den Grenzen 0 u. β so folgt.

$$\int_0^\beta dy\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(yx)\,dx = \int_0^\beta \frac{\alpha\,dy}{\alpha^2+y^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}$$

Führt man die Integration linker Hand umgekehrt aus, so folgt

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx\cdot\int_0^\beta \cos(yx)\cdot dy = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}$$ oder

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin(\beta x)}{x}\cdot dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}$$ für $\alpha = 0$ erhält man das merkwürdige $\int$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\beta x)}{x}\cdot dx = \pm\frac{\pi}{2}$$ je nachdem β pos. od. neg. ist

für $\beta = 1$ ist $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\cdot dx = \frac{\pi}{2}$

Integrirt man die Gl. 1) nach α zwischen den Grenzen 0 u. β, so folgt

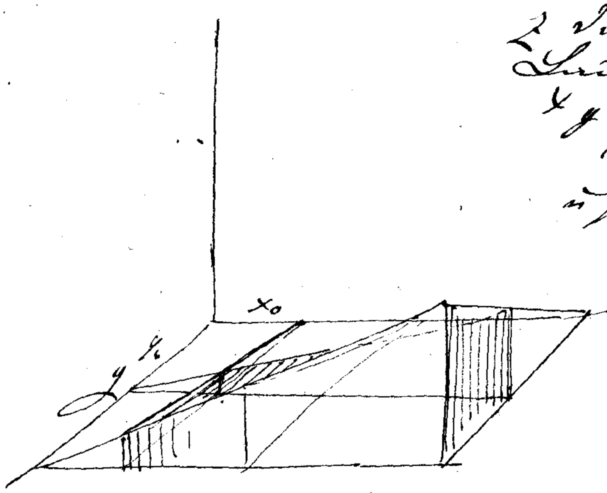
$$\int_0^\infty \cos(yx)\cdot\int_0^\beta e^{-\alpha x}\cdot d\alpha = \frac{1}{2}l(\beta^2+y^2) - \frac{1}{2}l(y^2) = \frac{1}{2}l\frac{\beta^2+y^2}{y^2}$$

oder. $$\int_0^\infty \frac{\cos(yx)}{x}(1-e^{-\beta x})\cdot dx = \frac{1}{2}l\frac{\beta^2+y^2}{y^2}$$

Zur Anwendung der Formel zum Abschnitt

$$K = \int_{x_0}^{x} dx\int_{y_0}^{y} f(x,y)\cdot dx$$ — es sei: $az = xy$

Gibt man dann y einen bestimmten Werth u. betrachtet so ist.



2. Die Ordinaten einer graden Linie, deren Neigung zur $x\,y$ Ebene, y zur hiez. Tangente hat.

Man findet nun, daß jeder Parallelschnitt eine gerade Linie gibt, welche mit wachsendem y immer mehr der senkrechten Lage sich nähert, und man erhält die Fläche, welche die windschiefe Fläche genannt wird.

Es ist dann

$$K = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{xy}{a}\, dx\, dy$$

$$K = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} x\, dx \int_{y_0}^{y} y\, dy = \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} x\,(y^2 - y_0^2)\, dx$$

also:

$$K = \frac{1}{4a}(x^2 - x_0^2)(y^2 - y_0^2)$$

für $x_0 = y_0 = 0$ erhält man

$$K = \frac{x^2 y^2}{4a} = \frac{a}{4} z^2$$

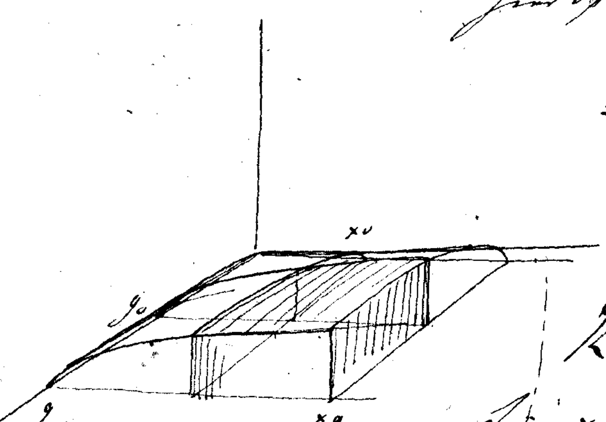
2. Beispiel. Es sei $z = \sqrt{xy}$

hier ist $K = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \sqrt{xy}\, dx\, dy$

$$= \int_{x_0}^{x} \sqrt{x}\, dx \int_{y_0}^{y} \sqrt{y}\, dy$$

$$= \frac{2}{3}\left(y^{\frac{3}{2}} - y_0^{\frac{3}{2}}\right)\int_{x_0}^{x} \sqrt{x}\, dx$$

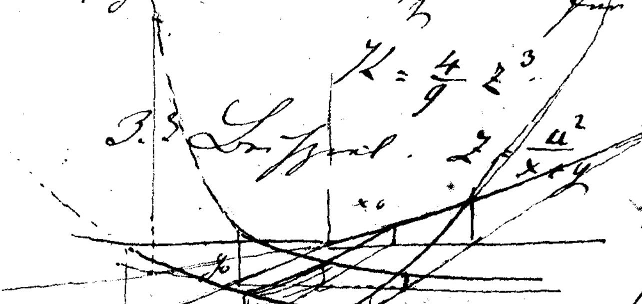
$$K = \frac{4}{9}\left(y^{\frac{3}{2}} - y_0^{\frac{3}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}} - x_0^{\frac{3}{2}}\right)$$



für $x_0 = y_0 = 0$ ist $K = \frac{4}{9}(xy)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{9}xy.z$

$$K = \frac{4}{9} z^3$$

3. Beispiel. $z = \frac{a^2}{x+y}$



Es ist $K = a^2 \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{x+y}$

$$K = a^2 \int_{x_0}^{x} dx\, l\left(\frac{x+y}{x+y_0}\right)$$

$$\int dx\, l(x+y) = x\, l(x+y) - \int \frac{x}{x+y}\, dx$$

$$\frac{x}{x+y} = 1 - \frac{y}{x+y}$$

Demnach $\int^{x} \frac{x}{x+y}\,\partial x = x\,l(x+y) - x + y\,l(x+y)$

$$\int_{x_0}^{x} \partial x\, l(x+y) = x\,l(x+y) - x_0\,l(x_0+y) - x + x_0 + y\,l(x_0+y) - y\,l(x_0+y)$$

$$K = a^2\{(x+y)\,l(x+y) - (x_0+y)\,l(x_0+y) - \cancel{(x-x_0)} - (x+y_0)\,l(x+y_0) + (x_0+y_0)\,l(x_0+y_0) + \cancel{(x-x_0)}\}$$

$$K = a^2\,l\,\frac{(x+y)^{x+y}\cdot(x_0+y_0)^{x_0+y_0}}{(x+y_0)^{x+y_0}\,(x_0+y)^{x_0+y}}$$

für $x_0 = y_0 = 0$ gesetzt

$$K = a^2\,l\,\frac{(x+y)^{x+y}}{x^x\,y^y}\ (w\ 0^0)$$

daher $K = a^2\,l.\,\frac{(x+y)^{x+y}}{x^x y^y}.$

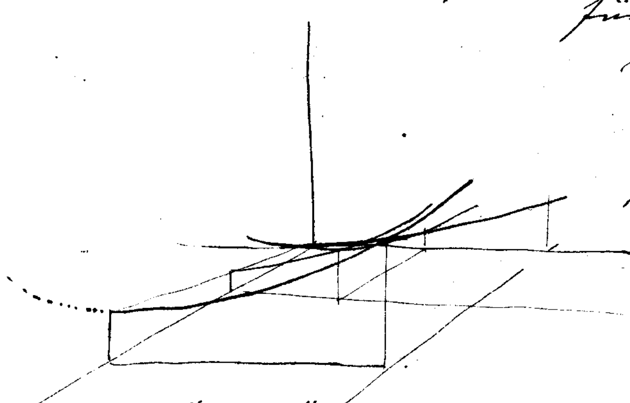
$\Omega = w^w = e^{w\,l\,w}$

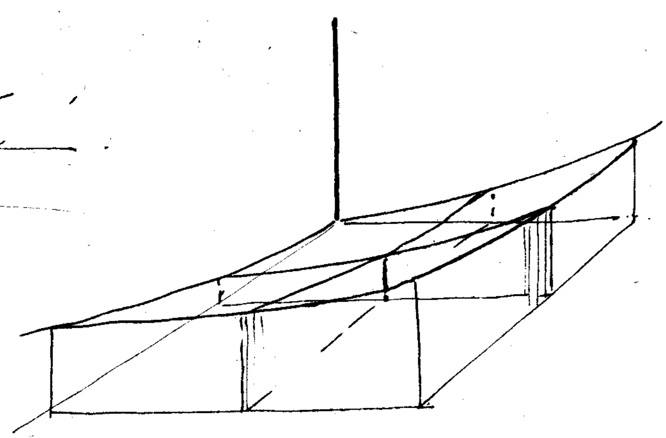
$w\,l\,w = 0 \quad \Omega = 1$

Elliptisches Paraboloid.

Es sei $2\frac{z}{\gamma} = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$ allg. F. $z = px^2 + q^2$

für $x = 0$ z ein Minimum daher hier Scheitel der Parabel.





$$\frac{2K}{c} = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\partial y$$

nach y integrirt.

$$= \int_{x_0}^{x} \partial x \left\{\frac{x^2}{a^2}(y-y_0) + \frac{y^3-y_0^3}{3b^2}\right\} = \frac{(x^3-x_0^3)}{3a^2}(y-y_0) + \frac{(x-x_0)(y^3-y_0^3)}{3b^2}$$

$$\frac{2K}{c} = \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{3}\left(\frac{x^2+xx_0+x_0^2}{a^2} + \frac{y^2+yy_0+y_0^2}{b^2}\right)$$

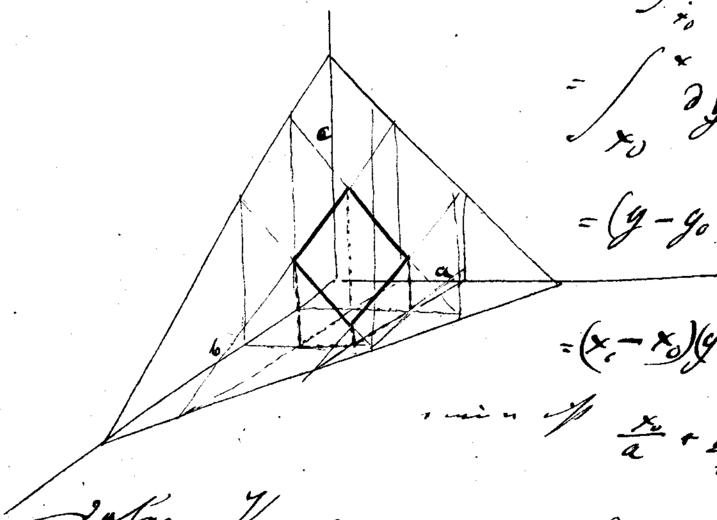
für den ganzen Raum $x_0 = y_0 = 0$ giebt.

$$\frac{2K}{c} = \frac{xy}{3}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{xy}{3}\cdot\frac{2z}{c}$$ demnach

$$K = \frac{xyz}{3}$$

Die Gl. der Ebene ist bekanntlich:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$



$$\frac{K}{c}=\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\partial y$$

$$=\int_{x_0}^{x}\partial x\left(y-y_0-\frac{x}{a}(y-y_0)-\frac{y^2-y_0^2}{2b}\right)$$

$$=(y-y_0)(x-x_0)-\frac{x^2-x_0^2}{2a}(y-y_0)-\frac{y^2-y_0^2}{2b}(x-x_0)$$

$$=(x-x_0)(y-y_0)\left(1-\frac{x+x_0}{2a}-\frac{y+y_0}{2b}\right)$$

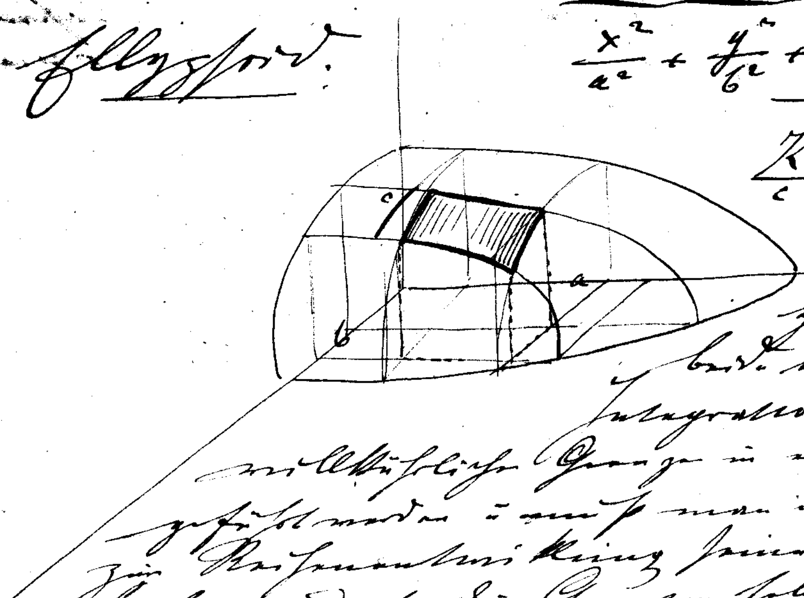
nun ist $\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}=1$

daher $\frac{K}{c}=(x-x_0)(y-y_0)\left\{\frac{z+z_0}{2c}\right\}$

$$K=(x-x_0)(y-y_0)\frac{z+z_0}{2}$$

Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



$$\frac{K}{c}=\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

Häufig können nicht beide aufeinander folgenden Integrationen zwischen willkürliche Grenzen in endlicher Form ausgeführt werden und muss man in solchen Fällen zur Reihenentwicklung seine Zuflucht nehmen. Haben jedoch die Grenzen solche Werthe, dass die betreffenden bestimmten Integrale angegeben werden können, während die unbestimmten nicht, so gelingt in solchem Fall häufig die Calcul.

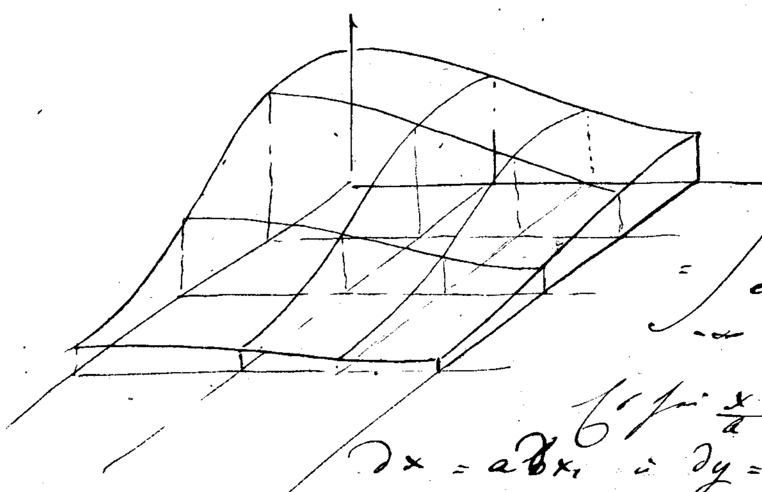
Darüber folgendes Beispiel:

Die Gl. $\frac{z}{c}=e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ ist gegeben.

Man verlangt den Inhalt, welchen die über die ganze xy Ebene bis ins unendliche sich ausbreitende Fläche mit dieser Ebene bildet.

Man hat:

$$\frac{K}{c} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx$$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{b^2}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \cdot dx$$

Setzt man $\frac{x}{a} = x_1$, dann $\frac{y}{b} = y_1$

$dx = a\,dx_1$ u. $dy = b\,dy_1$ folglich

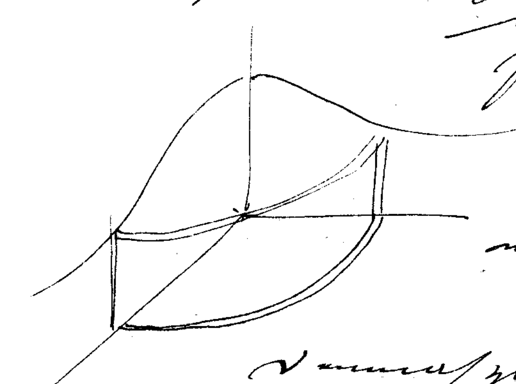
$\frac{K}{c} = ab \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx$. Ist jetzt das übrig bleibende Doppelintegral $= k$ also

$K = abck$, wo das k nun zu finden nunmehr Zweck ist.
Dieses Integral stellt offenbar den cubischen Raum einer Rotationsfläche dar, deren Ordinate $z = e^{-(x^2+y^2)}$ ist.
Um diesen Raum zu finden welcher sich ebenfalls über die ganze xy Ebene ausbreitet kann man so verfahren.
Man beschreibe vom Anfangspunkt der Coordinaten ∞ viele aufeinander folgende Kreise, so wird man durch je 2 auf einander folgende einen Cylinder erhalten und den ganzen Raum in den ∞ viele Schalen zerlegen können.
Ist nun der Radius eines solchen Kreises $= r$ u. $r^2 = x^2+y^2$
Die Basis einer solchen Schale ist $2\pi r\,dr$

also $z \cdot 2\pi r\,dr$ der Inhalt

folgt

$$k = \int_{0}^{+\infty} e^{-r^2} \cdot 2\pi r\,dr$$



u. unbestimmt gefunden

$k = -\pi e^{-r^2} + C$ unbestimmt.

Dann noch zwischen den Grenzen genommen

$k = \pi$ und

$K = abc\pi$

Man bemerke noch, daß sich k auf folgende Weise schreiben läßt
$k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$ und daß die beiden einander gleich sind so daß man hat

$k = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx\right)^2 = \pi$ folglich: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Es läßt sich dieses Integral in etwas allgemeinerer Form darstellen, wenn man setzt $x = az + \frac{b}{2a}$. Die Grenzen bleiben dieselben und man hat

$dx = a\,dz$. Wenn man nach geschehener Substitution x für z setzt.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2-bx}\cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\cdot e^{\frac{b^2}{4a^2}}$$

Das Integral ist eines von denjenigen, welche sich im Bestimmten nicht finden lassen und eine sehr große Wichtigkeit hat. Es lassen sich noch viele andere daraus finden, namentlich wenn man die Constanten imaginär werden läßt. zB. Setzt man $b\sqrt{-1}$ für b, so geht die Gleichung über in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2}(\cos bx - \sqrt{-1}\cdot\sin b) = \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$ indem bekanntlich

$e^{-bx\sqrt{-1}} = \cos bx - \sqrt{-1}\cdot\sin bx$ ist oder, wenn man das Reale vom Imaginären sondert.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2}\cos bx\cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{b^2}{a^2}},$$ welches Integral ebenfalls zuerst von Laplace gefunden allenthalben eine wichtige Rolle spielt. Der imaginäre Theil gibt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2}\sin(bx)\cdot dx = 0$$ welches sich ~~ergibt~~ übrigens von selbst versteht, weil die Fct. unter dem Integral eine ungerade Fct. ist und die Grenzen entgegengesetzt sind.

Die obenbetrachtete Calcul läßt sich in endlicher Form nicht mehr ausführen, wenn die Grenzen nicht $-\infty$ u. ∞ sind. Man muß dann in der Formel

$$K_2 = c\int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} e^{-\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b^2}}\cdot dy$$ Reihenentwicklung anwenden. Man erhält alsdann

$$K_2 = c\int dx\, e^{-\frac{x^2}{a^2}}\int_{y_0}^{y} e^{-\frac{y^2}{b^2}}dy$$ Es ist

$$e^{-\frac{x^2}{a^2}} = 1-\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{1\cdot2}\left(\frac{x}{a}\right)^4-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{x}{a}\right)^6+\dots$$ u. integrirt

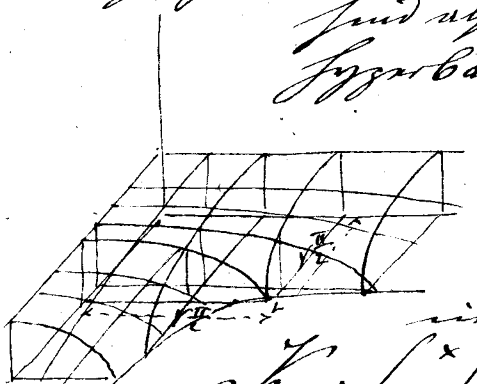
$$x-\frac{a}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\frac{a}{1\cdot2\cdot5}\left(\frac{x}{a}\right)^5-\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot7}\left(\frac{x}{a}\right)^7+\dots$$

und zwischen den Grenzen

$$K_2 = c(x-x_0)(y-y_0)\left\{1-\frac{1}{3}\frac{x^2-x_0^2}{a^2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot5}\frac{x^4-x_0^4}{a^4}-\dots\right\}$$
$$\left\{1-\frac{1}{3}\frac{y^2-y_0^2}{b^2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot5}\cdot\frac{y^4-y_0^4}{b^2}-\dots\right\}$$

2tes Beispiel. Es sei $z = a\cos(xy)$

Um sich zu erst von der Gestalt der Fläche eine Vorstellung zu machen, bemerken wir vor allem, daß sie die x, y Ebene nach einem System von Curven durchschneidet, welche alle in der Gl. $xy = \frac{(2k+1)}{2}\pi$ enthalten sind worin k alle ganze Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ bezeichnet. Diese Durchschnittslinien sind also wie bekannt gleichseitige Hyperbeln. Man soll nun den cub. Raum finden, welcher über dem Rechteck $(x_0 y_0)(x, y)$ steht, angenommen daß keine Durchschnittslinien in dasselbe fallen. Es ist



$$K = c\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\cos xy\,dy$$

$$K = c\int^{x}\frac{\sin xy - \sin(xy_0)}{x}\,.\,dx$$

Das Integral ist nur bei 0 Punkt nicht findbar, u. man muß Reihenentwicklung anwenden

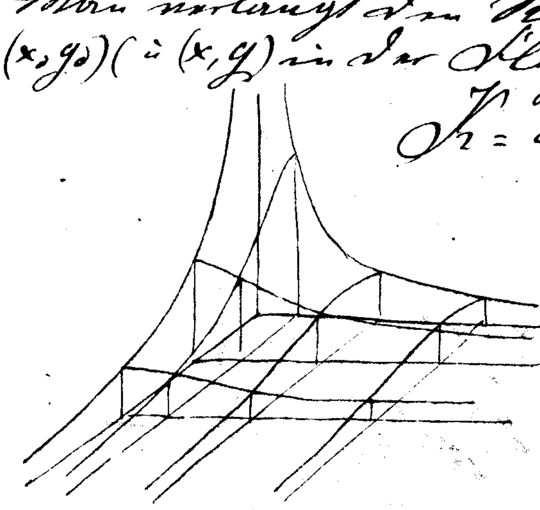
$x_0 = y_0 = 0 \qquad x = y_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ Man hat alsdann

$$K = a\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{\sin(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,x)}{x}\,dx$$ oder wenn man $x = t\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ setzt

$$K = a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\,.\,dt \,. \qquad \frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{1.2.3} + \frac{t^4}{1.2.3.4.5} - \dots$$

$$K = a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{1.2.3.3} + \frac{(\frac{\pi}{2})^5}{1.2.3.4.5.5} - \dots\right.$$

3ter Beispiel. Die Gl. $z = \frac{a^3}{x^2+y^2}$ ist gegeben. Man verlangt den Raum zwischen dem Rechteck $(x_0 y_0)$ u. (x, y) in der Fläche.



$$K = a^3\int_{x_0}^{x} dx\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{x^2+y^2}$$ oder

$$K = a^3\int^{x}\frac{dx}{x}\left(\text{arctg}\frac{y}{x} - \text{arctg}\frac{y_0}{x}\right)$$

Nun ist bekanntlich

$$\text{arctg}\frac{y}{x} = \frac{y}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^5 - \dots$$

folglich $K =$

$J_1 = a^3 \int \frac{\partial x}{x}\left(\frac{y-y_0}{x} - \frac{1}{3}\frac{y^3-y_0^3}{x^3} + \frac{1}{5}\frac{y^5-y_0^5}{x^5} - \dots\right)$ oder die Integration ausgeführt:

$$J_1 = a^3\left(\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{x_0 x} - \frac{(x^3-x_0^3)(y^3-y_0^3)}{3^2 x_0^3 x^3} + \frac{(x^5-x_0^5)(y^5-y_0^5)}{5^2 x_0^5 x^5} - \dots\right)$$

Wenn $z = f(xy)$ die Beschaffenheit hat, daß wie in dem vorausgehenden Beispiel nach der x u. nach y die erste Integration geleistet werden kann, aber die daraus folgende Integration nicht, so kann man statt der Rechnung nach Obig. folgendes Näherungsverfahren anwenden. Man denke sich für irgend ein x einen Parallelschnitt gelegt, so ist näherungsweise:

Schnitt $= k(f(x,y_0) + f(x,y_0+k) + \dots f(x,y_0+(m-1)k))$

folglich $J = k\int_{x_0}^{x}(f(xy_0) + f(x,y_0+k) + f(xy_0+2k) + \dots f(x,y_0+(m-1)k))dx$

Verfährt man auf gleiche Weise in Bezug auf y so ergibt sich: $J = h\int_{y_0}^{y}(f(x_0 y) + f(x_0+h,y) + \dots + f(x_0+(n-1)h,y))dy$

wo

$k = \frac{y-y_0}{m}$ u. $h = \frac{x-x_0}{n}$ 2 kl. Größen sind, die man je nach der zu erreichenden Genauigkeit wählt, u. aus ~~denen~~ den beiden Werthen v. J nimmt man ein noch genaueres zu gehen das arithm. Mittel.

Man soll den Raum finden, welcher zwischen beiden Flächen (deren Gl. $z=\varphi(xy)$ u. $z=\psi(x,y)$ gegeben sind) enthalten, über dem Rechteck $(x_0y_0)(xy)$ steht; vorausgesetzt die Flächen schneiden sich innerhalb der Integrationsfläche nicht, so ist:

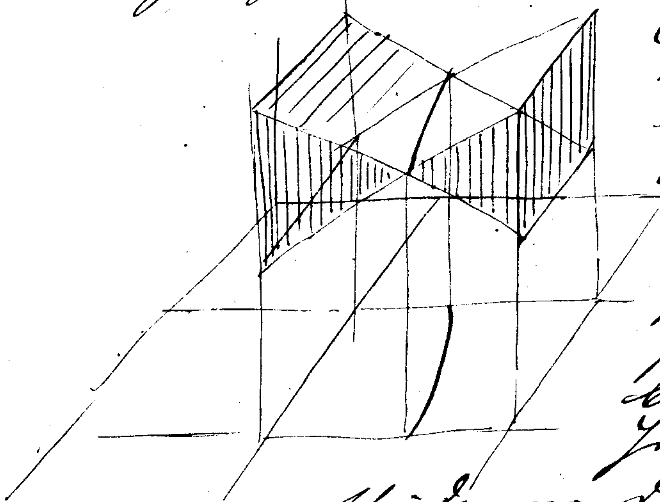
$$J = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} ((\varphi(xy) - \psi(xy))dy \text{. Z.B. Es sei.}$$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} + \frac{z}{c_1} = 0 \quad \varphi(xy) = -c\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$

$\psi(xy) = -c_1\left(\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1}\right)$

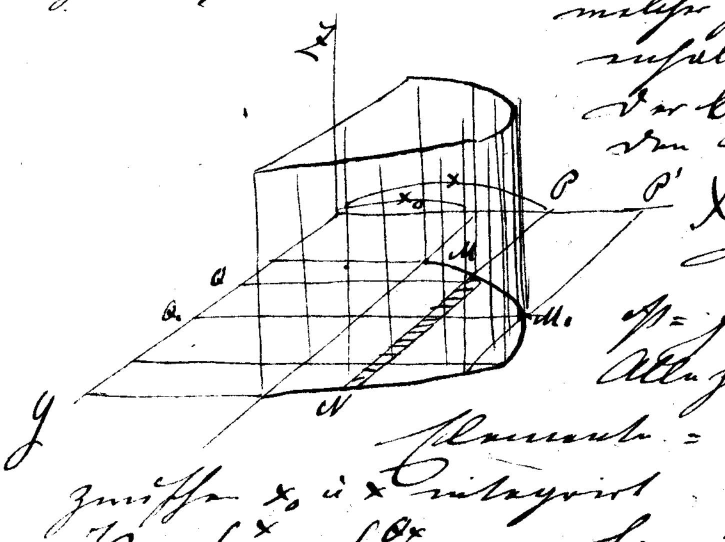
$$J = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left(x\frac{ac_1-a_1c}{aa_1} + y\frac{c_1b-cb_1}{bb_1}\right)dx\cdot dy$$

Wenn sich aber die beiden Flächen schneiden so wird die Durchschnittslinie L eine Curve von doppelter Krümmung sein und muß man ihre Projection auf die xy Ebene zur Lösung der Grenzen der Integration in Betracht ziehen. z. B. Es sei



$\varphi(xy) = xy$ u. $\psi(xy) = x+y$ u. $x_0 = y_0 = 0$ so schneiden sich die beiden Flächen nach einer Curve, welche sich ergibt, wenn man $xy = x+y$ setzt, woraus folgt $y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$. Die Projection der Durchschnittscurve bezeichnet die Grenzen der Integration. Dieser Fall ist ganz verschieden von dem bisherigen, denn man sieht, daß die Grenze des Integrals nach y eine Fct ist von x, während bisher bei rechtwinkligem Raume die beiden Grenzen unabhängig waren. In Folge dieses Umstandes darf man die Ordnung der Integration nicht mehr umkehren und wir gelangen zu der folgenden allgemeinen Aufgabe:

Es ist in der xy Ebene eine beliebige Contur gegeben. Man errichte von jedem Pkt derselben Parallele zur Achse z, welche eine die Oberfl. $z = f(xy)$ schneidende Cylinderfl. bildet. Man verlangt den Raum



welcher zwischen beiden Flächen enthalten ist. Es sei die Gl. der beiden Curven zwischen den Abscissen x_0 u. x $PM = \psi(x)$ u. $PN = \theta(x)$. Das Element der Fläche ist $= f(x,y)\,dx.dy$. Alle zwischen M und N enthaltenen Elemente $= dx \int_{\psi x}^{\theta x} f\,xy\,dy$ und zwischen x_0 u. x integrirt hat man

$$K_0 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{\psi x}^{\theta x} f(xy)\,dy$$

hier gilt der Satz von der Umkehrung der Grenzen nicht mehr, der überhaupt nur gilt u. nur unter der Bedingung abgeleitet würde, daß die Grenzen beider Integrationen von den Variabeln unabhängig seien. Es sei ferner $P_1M_1 = \varphi(x)$ so ist auf gleiche Weise wie vorhin $K_1 = \int_x^a dx \int_{\varphi(x)}^{\theta(x)} f(x,y)\,dy$ $K = K_0 + K_1$

Würde man die Gleichungen in Bezug auf die Ae der y kennen, so ist leicht zu sehen, wie man die Basis abtheilen müßte, um den ganzen Raum zu finden. Es müßte dann gegeben sein $QM = \psi_1(y)$ u. $Q_1M_1 = \varphi_1(y)$, $Q_2N = \theta_1(y)$

Zunächst entsteht die Frage, ob das Integral für K_0 welches alle andern vertreten kann, nicht so transformirt werden kann, daß es konstante Grenzen enthält. Diese Transformation kann auf sehr verschiedene Weise geschehen. Es sei nämlich z eine nach x konst. nur v. y abhänge eine veränderliche Größe gegeben durch die Gl. $y = \psi(x) + z(\theta x - \psi x)$ für $y = \psi x$, $z = 0$ so sind die Grenzen $z = 0$ u. 1 $y = \theta$ $z = 1$ u. man hat $K_0 = \int_{x_0}^{x} dx \int_0^1 f(x, (\psi(x) + z(\theta x - \psi x)))(\theta(x) - \psi(x))\,dz$

oder $K_0 = \int_{x_0}^{x} (\theta(x) - \psi(x))\,dx \int_0^1 dz\, f(x(\psi(x) + z(\theta x - \psi(x)))$. Es kann nun geschehen, daß, weil hier die Grenzen von einander unabhängig sind die Vertauschung der Integrationsordnung also erlaubt ist, eine Integration effectuirt u. also das Doppelintegral auf ein einfaches reducirt werden kann.

Es sei die untere Grenze $\psi x = 0$, so ist $K_0 = \int_{x_0}^{x} \theta x\, dx \int_0^1 dz\, f(x, z\theta(x))$

Z. B. läßt sich das Integral $K_0 = \int_0^\infty dx \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, e^{-(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)}$ auf ein einfaches reduciren. Obschon in dieser Form die Integration weder nach y noch nach x möglich ist so liefert doch die Transformation worin $\theta x = \sqrt{(1+x^2)}$ ist, wenn man $y = z\sqrt{1+x^2}$ setzt die Gl. $K_0 = \int_0 dx \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} \cdot e^{-(\alpha^2x^2+\beta^2z^2+\beta^2x^2z^2)}$

Vertauscht man die Ordnung der Integration

So ergibt sich:

$$K_6 = \int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{1+z^2}}\, e^{-\beta^2 z^2} \int_0^\infty e^{-(\beta^2 z^2+\alpha^2)\,x^2}\,\partial x$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$ so folgt

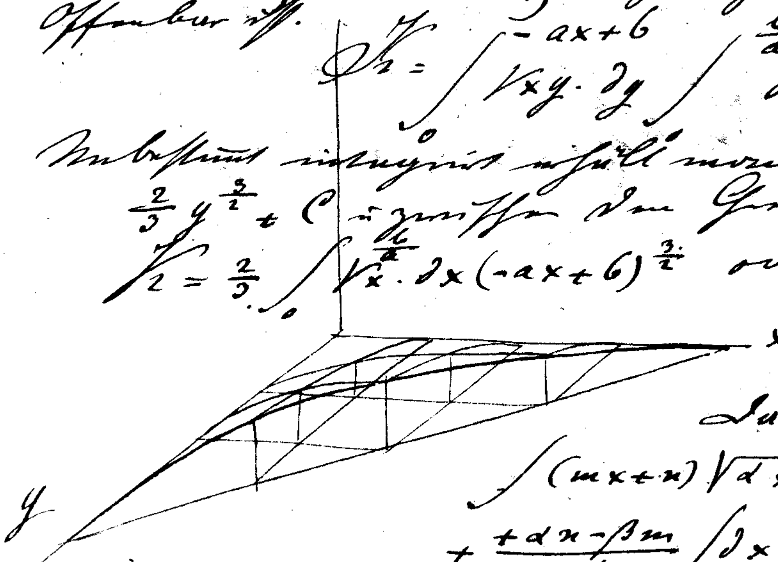
$$K_6 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{(1+z^2)(\alpha^2+\beta^2 z^2)}} \cdot e^{-\beta^2 z^2}$$; wodurch also unser Doppelintegral auf ein einfaches zwischen constanten Grenzen reducirt wird.

Zu einer Aufgabe über die Cubatur zurückkehrend bemerkt man vor allem, daß der Contur in der xy Ebene entweder ein gegebener der krummen Oberfläche fremder oder die Durchschnittslinien mit der xy Ebene sein kann.

Einiges 1 Beispiel: Es sei die Gl der krummen Fl. $z=\sqrt{xy}$ die Gl der Curve in der xy Ebene sei $y=-ax+b$. Man verlangt den Raum welcher durch diese gerade Linie, und die Axen der x u. y begrenzt wird.

Offenbar ist

$$K_2 = \int_0^{-ax+b}\sqrt{xy}\cdot\partial y \int_0^{\frac{b}{a}}\partial x = \int_0^{\frac{b}{a}}\sqrt{x}\,\partial x\int_0^{-ax+b}\sqrt{y}\cdot\partial y$$



Unbestimmt integrirt erhält man

$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}+C$ u. zwischen den Grenzen genommen

$$K_2 = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{b}{a}}\sqrt{x}\cdot\partial x\,(-ax+b)^{\frac{3}{2}}$$ oder

$$K_2=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{b}{a}}(-ax+b)\sqrt{-ax^2+bx}\cdot\partial x$$

Da nun

$$\int(mx+n)\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma} = \frac{m}{3\alpha}(\alpha x^2+2\beta x+\gamma) + \frac{\alpha n-\beta m}{\alpha}\int\partial x\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}$$, so folgt

unbestimmt integrirt:

$$K_2 = \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{3}(-ax^2+bx)+\frac{b}{2}\int\partial x\sqrt{-ax^2+bx}\right.$$ oder

zwischen den Grenzen genommen

$b - a\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b^2}{a}) = 0$ daraus

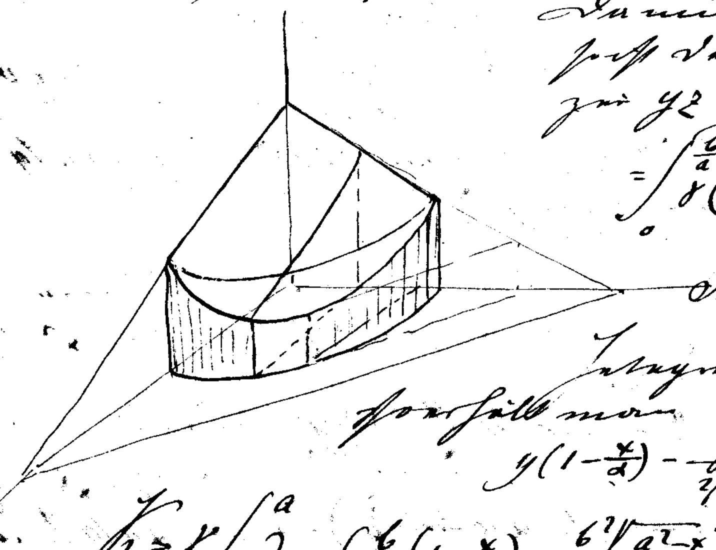
$$K_2 = \frac{b}{3}\int_0^{\frac{b}{a}}\partial x\,\sqrt{-ax^2+bx}$$ und da

$$\int\partial x\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma} = \frac{\alpha x+\beta}{2\alpha}\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}+\frac{\beta^2-\alpha\gamma}{2\alpha\sqrt{-\alpha}}\ \text{arc sin}\ \frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}$$

Es folgt. $\int dx\sqrt{-ax^2+bx} = \frac{-2ax+b}{-4a}\sqrt{-ax^2+bx}$
$+\frac{b^2}{8a\sqrt{a}}\ \text{arc sin}\ \frac{-2ax+b}{2\sqrt{\frac{b^2}{4}}=b}$

$K_2 = \frac{b}{3}\ \frac{b^2}{8a\sqrt{a}}\pi = \frac{\pi b^3}{24a\sqrt{a}}$

Die Fläche sei eine 3 ~~achsiges Ellipsoid~~ Ebene und die Curve in der xy Ebene eine Ellipse, also man habe die Gl. $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$ $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



Da nun $z=\gamma\left(1-\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)$ so ist der Inhalt der Parallelfläche zur yz Ebene

$$=\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\gamma\left(1-\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)dy$$

$$K_2=\gamma\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)dy$$

Integrirt man ein bestimmtes, so erhält man

$$y\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)-\frac{y^2}{2\beta}+C$$

$$K_2=\gamma\int_0^a dx\left(\frac{b}{a}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)-\frac{b^2\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2\beta}\right)\sqrt{a^2-x^2}$$

Oder $K_2=\gamma\frac{b}{a}\int_0^a dx\sqrt{a^2-x^2}-\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{b}{a}\int_0^a x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)\cdot dx$
$-\frac{\gamma}{\beta}\frac{b^2}{2a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,dx$

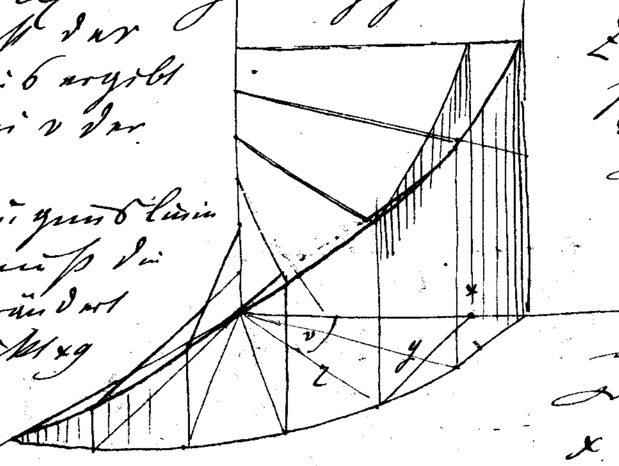
Das erste Integral ist $=\frac{\pi a^2}{4}$. Das zweite gibt ein bestimmtes Integral $-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ folglich Ganze ausgeführt.

$K_2=\gamma\left(ab\frac{\pi}{4}-\frac{a^2b}{3\alpha}-\frac{ab^2}{3\beta}\right)$ oder endlich

$K_2=ab\gamma\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}\right)\right)$ Es ist leicht zu sehen, daß man auf gleiche Weise verfahren müßte, um den Inhalt eines elliptischen durch eine Ebene schief begrenzten Cylinders zu erhalten. Man hätte das vorige Verfahren 4mal in Anwendung zu bringen.

4. Man soll den Inhalt der Schraubenfläche finden und dieselbe entstehe dadurch daß eine gerade Linie sich um die z Achse dreht und an

Die Achse der y und gehend der Drehung proportional längs der z Achse aufsteigt



Daraus ergibt sich die Gl. dieser Fl:

Es sei v der Winkel, welchen die Projection der Erzeugenden Linie mit der x Achse bildet. So muss die z Ordinate so lange unverändert bleiben, also der Punkt xy in die jeder Projection liegt.

Daraus ergibt sich.

$x = r\cos v$, $y = r\sin v$

$z = a(\frac{\pi}{2} - v)$

Nun ist $\operatorname{ctg} v = \frac{x}{y}$ folglich $v = \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$

und man hat $z = a\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{y}$

$K = \int_0^x dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} a \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dy$ indem nämlich die Curve in der xy Ebene, deren Gl. $y = \sqrt{r^2-x^2}$

oder $K = a\int_0^x dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} (\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x})\,dy$ oder:

oder $K = \frac{a\pi}{2}(\frac{x}{r}\sqrt{r^2-x^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}) - a\int dx\int^{\sqrt{r^2-x^2}} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot dy$.

Nun ist nun bestimmt durch theilweises Integriren.

$\int \operatorname{arc}\frac{y}{x}\,dy = y\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{x}{2}\,l(x^2+y^2) + C$

$K = \frac{a\pi}{4}(x\sqrt{r^2-x^2} + r^2\arcsin\frac{x}{r}) - a\int_0^x dx\sqrt{r^2-x^2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{x} + x\,l(\frac{x}{r})$

Denn $\int x\,l\frac{x}{r}\cdot dx = \frac{x^2}{2}\cdot l\frac{x}{r} - \frac{x^2}{4} + C$

Und da $x^2\,l\frac{x}{r} = 0$ wird für $x = 0$, sodann.

wenn man $x = r\cos z$ setzt.

$\int dx\cdot\sqrt{r^2-x^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{x} = -r^2\int z\cdot\sin^2 z\cdot dz$. und da ferner

$\int z\sin^2 dz$ durch theilweises Integriren $= -z\sin z\cdot\cos z + \int(\sin z + z\cos z)\cos z\cdot dz = -z\sin z\cos z + \frac{1}{2}\sin z^2 + \frac{z^2}{2} - \int z\sin z^2\,dz$,

so dass $\int z\sin z^2\,dz = -\frac{z}{2}\sin z\cos z + \frac{1}{4}\sin z^2 + \frac{z^2}{4} + C$

in dem man nun wieder $\cos z = \frac{x}{r}$, $\sin z = \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r}$,

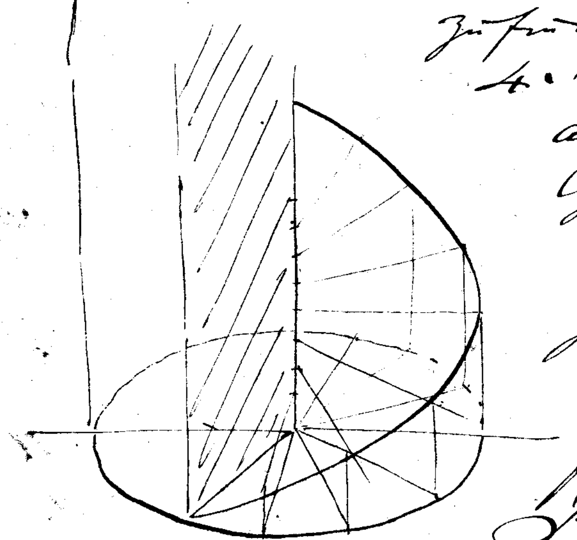
$z = \arccos\frac{x}{r}$ einsetzt u. reducirt, so ergibt sich schliesslich

$$K = \frac{a\pi}{4}(x\sqrt{r^2-x^2} + r^2\arcsin\frac{x}{r}) - \frac{ax^2}{4}(2\,l\frac{x}{r} - 1) + ar^2(-\frac{x}{2r^2}\cdot\sqrt{r^2-x^2}\arccos\frac{x}{r} - \frac{x^2}{4r^2} + \frac{1}{4}(\arccos\frac{x}{r})^2 - \frac{\pi^2}{16})$$

Oder nach einiger Reduction

$$K = \frac{ax}{8}\sqrt{r^2-x^2}\cdot \arcsin\frac{x}{r} - \frac{ar^2}{4}\left(\pi - \arccos\frac{x}{r}\right)\cdot\arccos\frac{x}{r}$$
$$- \frac{ax^2}{2}\cdot l\,\frac{x}{r} + \frac{ar^2\pi^2}{16}$$

für $x = r$ folgt $K = \frac{ar^2\pi^2}{16}$. Um den Cubicinhalt



unsers ganzen Gewölbes zu finden muss man diesen Inhalt 4 mal nehmen und 3 Cylinder addiren. Die Höhe dieser Cylinder ergibt sich d. $\frac{a\pi}{2}$, $\frac{2a\pi}{2}$, $\frac{3a\pi}{2}$ (für $x = r$ u. $y = 0$) aus der Gl. Inhalt der Cylinder

$$= \frac{r^2\pi}{4}\cdot\frac{6a\pi}{2} = \frac{3ar^2\pi^2}{4}$$

folgl. der verlangte Raum

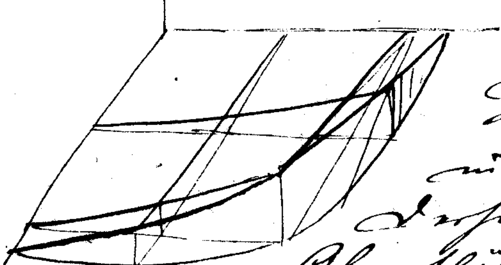
$$K = \frac{ar^2\pi^2}{4} + \frac{3ar^2\pi^2}{4} = ar^2\pi^2$$

Da nun $a\frac{\pi}{2} = \frac{h}{4}$ demnach

$$K = \frac{h}{2}\cdot\pi r^2.$$

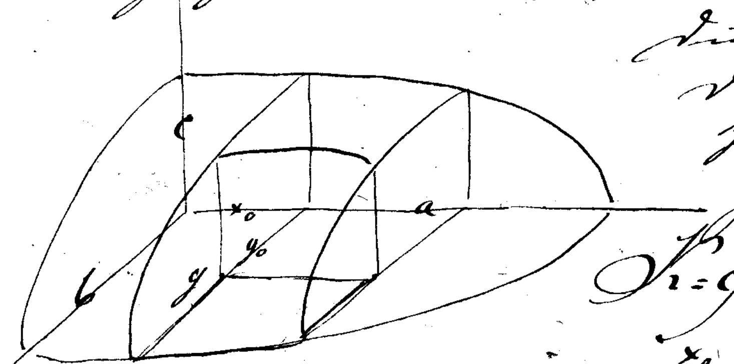
Ist $cz = xy$ die Fläche, u. die Curve in der xy Ebene sei eine Ellipse d. Gl. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, so ergibt sich

$$K = \frac{a^2b^2}{4c}$$



Ist nun Durchschnitt der Curve mit der xy Ebene der Durchschnitt derselben mit der gegebenen Oberfläche sein soll, so ergibt sich ihre Gl., wenn man in der Oberflächen Gl. $z = f(xy)$ $z=0$ setzt, wodurch $0 = f(xy)$. Im Uebrigen ist das Verfahren dem obigen analog nur können keine cylindrische Begrenzungsflächen vortheilen.) 1. Man soll den Inhalt des 3axigen Ellipsoids finden.

Die Gl. ist $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Um die Basis zu finden setze man $z=0$ so gibt es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ die Curve welche die Integrations Grenzen bestimmt. Integrirt gibt $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$



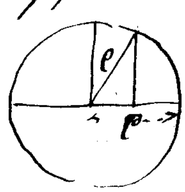
$$K=c\int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} dy \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

Setzt man der Kürze wegen $y_0=0$ und schreibt den Ausdruck unter der Wurzel in etwas anderer Form so erhält man

$$K=\frac{c}{b}\int_{x_0}^{x} dx \int_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)-y^2}, \quad \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\rho$$

$$K=\frac{c}{b}\int_{x_0}^{x} dx \int_{0}^{\rho} dy \sqrt{\rho^2-y^2}$$

Das Integral nach y stellt offenbar den Inhalt eines Kreises dar, dessen Radius $=\rho$. Es ist also $=\frac{\pi\rho^2}{4}$ und man hat



$$K=\frac{c}{b}\int_{x_0}^{x} dx\, \frac{\pi\rho^2}{4} : K=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{bc}{a^2}\int_{x_0}^{x} dx(a^2-x^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{bc}{a^2}\left\{a^2x-\frac{x^3}{3}-a^2x_0+\frac{x_0^3}{3}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{bc}{a^2}(x-x_0)\left\{a^2-\frac{x^2+xx_0}{3}\right\}$$ Ist für $x_0=0$ u. $x=a$ so ist

$$K=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{bc}{a^2}\cdot a\left(a^2-\frac{a^2}{3}\right) \text{ oder } K=\frac{abc}{6}\cdot\pi$$

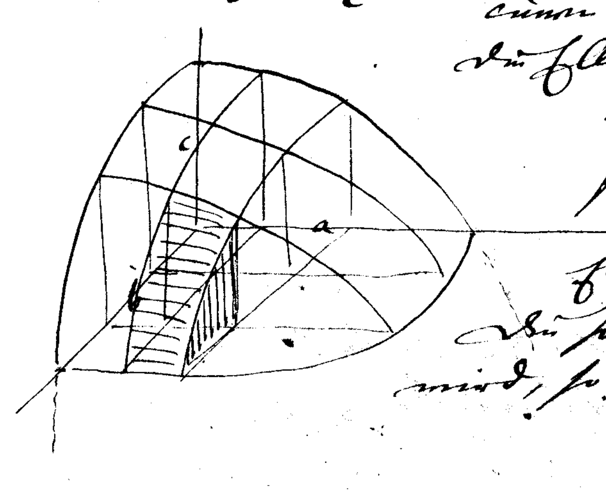
und das ganze Ellipsoid $\frac{4}{3}\pi abc$.

2. Elliptisches Paraboloid sei gegeben

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c}=1$ die Gleichung der Begrenzungscurve in der xy Ebene ist für $z=0$ die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

folglich $$K=c\int_{x_0}^{x} dx\int_{y_0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$



Ist $y_0=0$ und wenn die Integration nach y ausgeführt wird, so ergibt sich:

$$K = c\int_{x_0}^{x} \partial x \cdot \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{b}{3a^3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$K = \frac{bc}{a}\int_{x_0}^{x}\partial x\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{(a^2-x^2)}{3a^2}\right)\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\frac{3a^2-3x^2-a^2+x^2}{3a^2} = \frac{2}{3a^2}(a^2-x^2)$$

$K = \frac{2bc}{3a^3}\int_{x_0}^{x} \partial x (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$ Setzt man ferner ~~$x = a\cos z$~~ $x = a\sin z$

so erhält man im bestimmt $K = \frac{2}{3}abc\int \cos z^4 . \partial z$

Nun ist bekanntlich $\cos z^4 = \frac{1}{8}(\cos 4z + 4\cos 2z + 3)$

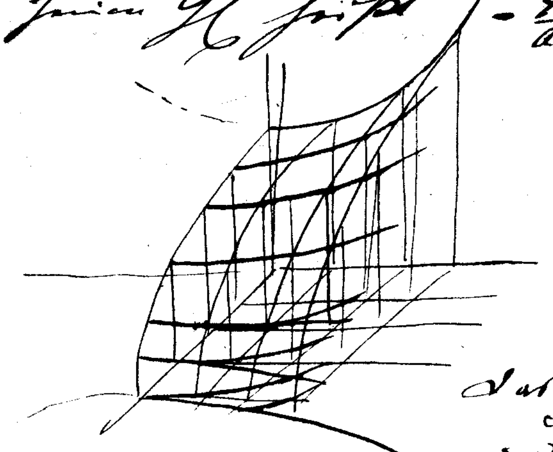
folglich im bestimmt $K = \frac{2}{3}abc \cdot \frac{1}{8} \cdot \left\{\frac{1}{4}\sin 4z + 2\sin 2z + 3z\right\} + C$

~~[illegible]~~ Will man für den Theil des Raumes welcher in der xy Ebene liegt, so muß man $x_0 = 0$, $x = a$ u. $z_0 = 0$ u. $z = \frac{\pi}{2}$ und zwischen diesen Grenzen genommen

$K = \frac{\pi}{8}abc$ ...

9. Das dazige Hyperboloid Aufgaben.

Seine Gl. heißt $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



für $x = 0$ eine Ellipse
für $y = 0$ eine Hyperbel
für $z = 0$ eine Hyperbel

$$K = \frac{c}{b}\int_{x_0}^{x} \partial x \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}} \partial y \sqrt{\frac{b^2(a^2+x^2)}{a^2} - y^2}$$

Nimmt man $\frac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2} = \rho$, so ist das Integral $\int_0^{\rho} \partial y \sqrt{\rho^2-y^2} = \frac{\pi}{4}\rho^2$

und man hat $K = \frac{\pi c}{4b}\int_{x_0}^{x} \partial x \cdot \frac{b^2}{a^2}(a^2+x^2)$

oder $K = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{bc}{a^2}\cdot\left\{a^2x + \frac{x^3}{3}\right\}_{x_0}^{x}$ $K = \frac{\pi}{4}\frac{bc}{a^2}\left\{a^2(x-x_0) + \frac{x^3-x_0^3}{3}\right\}$

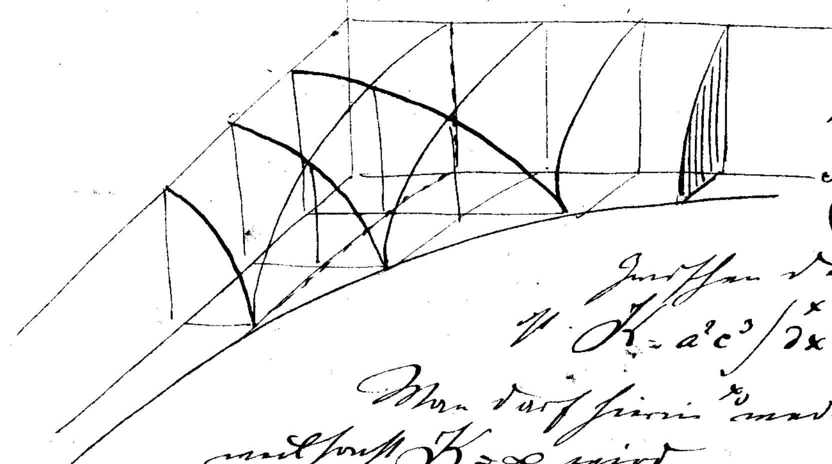
$$K = \frac{\pi}{4}\frac{bc}{a^2}(x-x_0)\left(a^2 + \frac{x^2+xx_0+x_0^2}{3}\right)$$

Man soll den Raum finden, welcher zwischen 2 Parallelschnitten der xy Ebene und der Fläche enthalten ist, deren Gl. $z = \frac{a^4-x^2y^2}{(a^4+x^2y^2)^2}a^2c^3$ für $y = 0$ ist $z = \frac{c^3}{a^2}$ ferner wird $z = 0$ wenn $x^2y^2 = a^4$ od. $xy = \pm a^2$

so ist $K = a^2c^3\int_{x_0}^{x} \partial x \int_0^{\frac{a^2}{x}} \frac{a^4-x^2y^2}{(a^4+x^2y^2)^2} . \partial y$

Bemerkt man daß $\frac{a^4-x^2y^2}{(a^4+x^2y^2)^2} = \frac{a^4+x^2y^2-y\frac{\partial(a^4+x^2y^2)}{\partial y}}{(a^4+x^2y^2)^2}$

$$= \frac{\partial\left(\frac{y}{a^4+x^2y^2}\right)}{\partial y}$$ so



folgt: unbestimmt

$$\int\frac{a^4-x^2y^2}{(a^4+x^2y^2)^2}\,\partial y = \frac{y}{a^4+x^2y^2}$$

zwischen den Grenzen genommen

ist $K = a^2c^3\int^x_{x_0}\partial x\,\frac{1}{2a^2x} = \frac{c^3}{2}\,l\,\frac{x}{x_0}$

Man sieht hieraus daß für $x=\infty$ und $x_0=0$ unser [illegible] $K=\infty$ wird

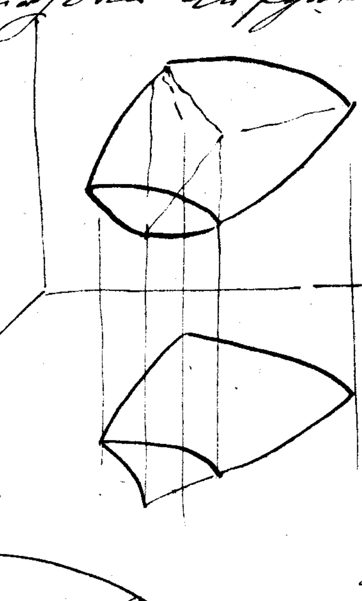
3.) Man soll den Raum finden, welcher zwischen schneidenden Flächen enthalten ist.

Das Verfahren dieser Bestimmung kann im Allgemeinen etwa so bezeichnet werden.

Man bestimmt die Gl. der Projection der Durchschnittscurven der beiden Flächen auf die xy Ebene so geben diese die Grenzen der Integration an und es ist dadurch die Aufgabe im Allgemeinen gerechtfertigt.

6. Sei der Inhalt zu finden welcher zwischen der Oberfläche Ellipsoids u. [illegible] enthalten.

Man hat.



Derartige Aufgaben führen meistens auf schwierige Integration.

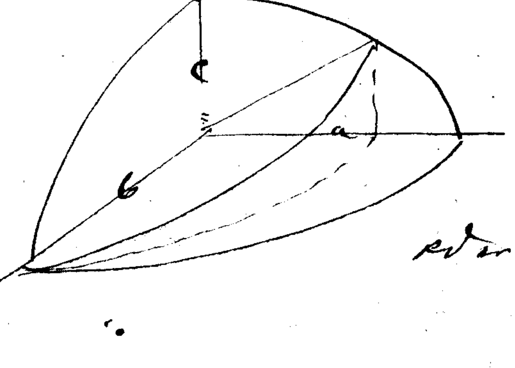
nur das, da einer durch die Ebene und xy u. xz Ebene ist.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ u. }$$

$$z=kx$$

Die Gleichung der Projection der Durchschnittscurve ist:

$$y^2 = b^2 - b^2\frac{c^2+a^2k^2}{a^2c^2}\,x^2$$



oder $y = \frac{b\sqrt{a^2k^2+c^2}}{ac}\sqrt{\frac{a^2c^2}{a^2k^2+c^2}-x^2}$

Es sei der Kürze wegen

$$\frac{a^2k^2ec^2}{a^2c^2} = \frac{1}{\alpha^2} \qquad y = \frac{b}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} \text{ oder } x = \frac{\alpha}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

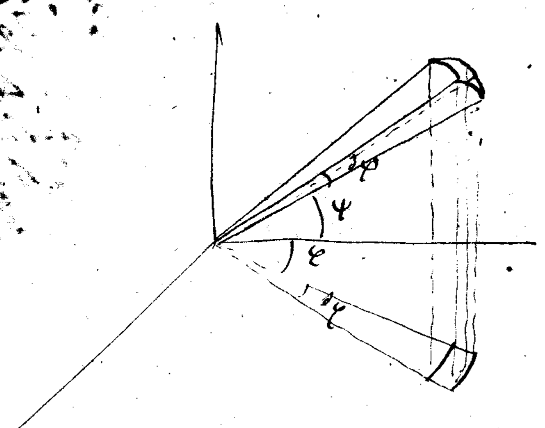
folglich ist

$$K = \int_0^{\alpha} dx \int_0^{\frac{b}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}} kx\,dy + \int_0^{b} dy \int_{\frac{\alpha}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx$$

(Werke v. Lamé u. Moigno)

Einführung von Polarordinaten.

Man kann den zu bestimmenden Raum auf die verschiedenste Weise in seine Elemente zerlegen nämlich wie wir früher angenommen haben in parallelepipedische Elemente und wie wir weiter annehmen werden in Pyramidale und wie schon anderwärts angenommen worden ist in solche sechsflächige körperliche Elemente, welche von 2 bestimmten krummen Oberflächen eingeschlossen werden. Wir können uns hierin noch mit der Polarord. abgeben. Denkt. Man sich nun durch die Axe der z eine Ebene gelegt, welche mit der Axe der x den Winkel φ bildet, u. dieser Ebene den Winkel ψ gemacht welchen der Radius vector r mit der xy Ebene bildet, so drückt sich das pyramidale Element des Raumes wie folgt aus. Dieses Element schließlich begrenzt die 2 Ebenen u. 2 conische Flächen



ist zur Basis ein Rechteck, dessen Seiten $r\cos\psi\,d\varphi$ u. $r\,d\psi$ der Inhalt also $r^2\cos\psi\,d\psi\,d\varphi$.

folglich Inhalt des Elementar-Körpers $= \frac{r^3}{3}\cos\psi\,d\psi\,d\varphi$

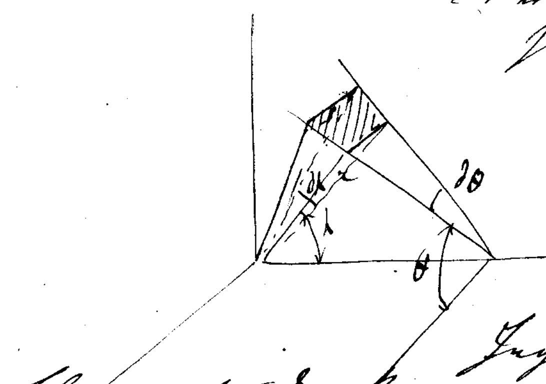
folglich $K = \frac{1}{3}\iint r^3\cos\psi\,d\psi\,d\varphi$

Verlangt man, wenn der Pol innerhalb des Körpers liegt den ganzen Raum, so ist nach ψ zwischen 0 u. 2π u. nach φ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ u. $\frac{\pi}{2}$ zu integrieren. und man hat

$K = \frac{1}{3}\int^{\pi} d\varphi \int^{2\pi} r^3\cos\psi\,d\psi$. Es sei die Kr-fläche eine Kugel so ist r = Const. und man hat für $\frac{1}{2}$ Theil

$$K = \frac{r^3}{3}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos\psi\,d\psi = \frac{\pi r^3}{3} \text{ als ganz } 4\frac{\pi r^3}{3}$$

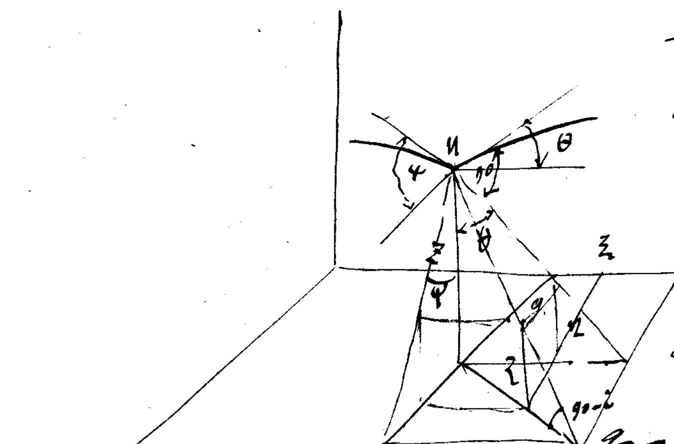
Ist θ der ∠ welchen die Ebene, in welcher der Radius vector r u. die Axe der z liegt (mit xz gebildet) u. λ der Winkel, welchen der Radius vector mit der Axe der z bildet, so ist



$$K = \frac{1}{3}\iint r^3 \sin\lambda \, d\lambda \, d\theta$$

Complanation beliebig krummer Oberflächen.

Die Bestimmung der den Incrementen dx u. dy entsprechenden Elemente der krummen Oberfläche setzt voraus, daß man den Winkel kennt, welchen die Tangirend-Ebene im Punkte xy mit der xy Ebene bildet.



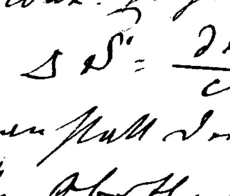
Um diesen Winkel direct abzuleiten ist es gut die geometrische Bedeutung der Partialdiff. quot. $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ zu kennen.

Denkt man sich nämlich 2 Parallelschnitte gelegt so ergibt sich bald daß diese Differenzquotienten die Tgten der ∠ sind welche die geometrischen Berührenden an die Curven der Parallelschnitte gezogen mit der xy Ebene bilden, so daß man hat: $\frac{dz}{dx} = tg\,\theta$ u. $\frac{dz}{dy} = tg\,\psi$

Um nun den Inhalt des Elementes der krummen Oberfl. zu finden, welches über dem Rechteck $dx.dy$ ~~liegt~~ liegt u. welches in der Tangirenden Ebene liegt, daß sein Inhalt ΔS erhalten wird, wenn man jenes $dx.dy$ des Rechteckes durch den cos des Winkels dividirt, welchen die Tangirende Ebene mit der xy Ebene bildet. Es sei dieser Winkel $= i$, so hat man also

$$\Delta S = \frac{dx.dy}{\cos i}$$

Um endlich ∠ i zu finden betrachte man statt der tangirenden Ebene die Normale auf die kr. Oberfl. u. bestimme den Winkel welchen diese mit der xy Ebene macht so ist dieser $= \frac{\pi}{2} - i$. Dazu endlich bedarf man der Gl der Normalen. Es seien



$\xi\, \eta\, \zeta$ die Coordinaten der Normale der kr.

Fläche im Punkte z. Man projicire die Normale auf die Ebenen der beiden Parallelschnitte, so stehen auch ihre Projectionen senkr. auf den Linien der Parallelschnitten und bilden mit der z Ordinate die Winkel θ u. ψ. die Gleichg. der Proj. der Normalen sind also. $(\zeta - z)\,\mathrm{tg}\,\theta = \xi - x$ und $(\zeta - z)\,\mathrm{tg}\,\psi = \eta - y$ oder nimmt man für $\mathrm{tg}\,\theta$ u. $\mathrm{tg}\,\psi$ ihre Werthe auf so ist.

$$\xi - x + \frac{\partial z}{\partial x}(\zeta - z) = 0 \quad \text{u.} \quad \eta - y + \frac{\partial z}{\partial y}(\zeta - z) = 0$$

Ist δ die Länge der Normalen zwischen dem Punkte der Oberfläche und dem Durchschnitt mit der xy Ebene, so hat man nur zunächst die Coordinaten dieses Durchschnittspunktes zu erhalten zu setzen $\zeta = 0$ Man erhält dann

$$\xi - x = z\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{u.} \quad \eta - y = z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$, folglich, da $\delta^2 = z^2 + (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$

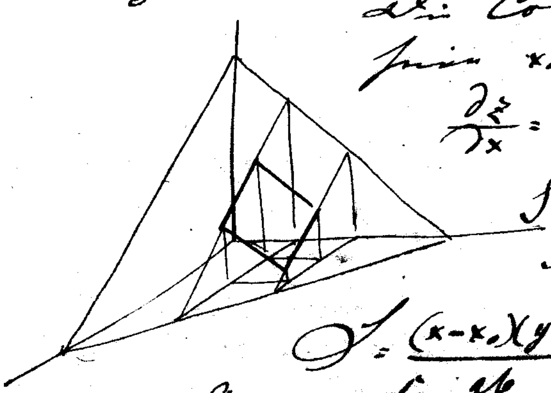
erhält man $\delta = z\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ da $\cos i = \frac{z}{\delta}$, so erfolgt

mithin $\cos i = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$ folglich $S = \iint dx \cdot dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$

~~Man die~~ Man kann sich hier, wie bei der Cubatur die Frage vorlegen. Nach dem Inhalt der krummen Oberfläche, welche 1. über einem Rechteck,
2. über einer gegebenen Curve in der xy Eb. liegt und
3. welche zwischen 2 oder mehreren sich schneidenden kr. Fl. enthalten ist. In dem ersten Falle sind die Grenzen der Integration unabhängig u. die Ordnung der Integration willkürlich, in den beiden letzteren Fällen aber nicht.

1. Es sei gegeben die Gleichg. der Ebene.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Die Projection sei ein Rechteck. die Coordinaten der Diagonalecken seien $x_0, y_0, x\, y$. Hier ist



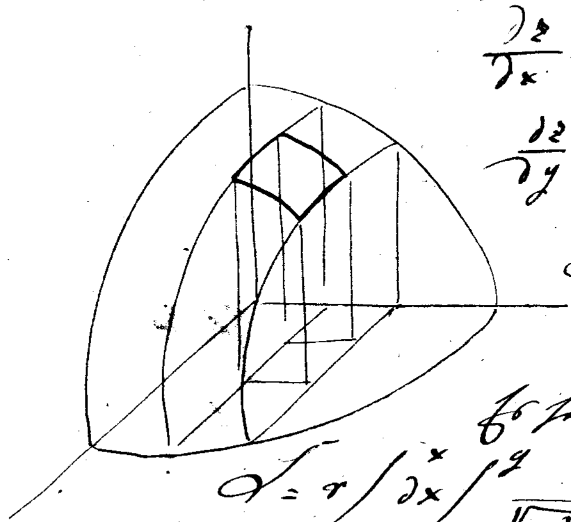
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c}{a} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c}{b} \text{ folglich}$$

$$S = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} dy \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}$$

$$S = \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{ab}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$$

2. Die Gl. der Kugel sei gegeben.

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

$$S = r\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\frac{\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

Ist für $x_0 = y_0 = 0$

$$S = r\int_0^x \partial x\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$ da nun

$$\int\frac{r\,\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = r\int\frac{\frac{\partial y}{\sqrt{r^2-x^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}} = r \arcsin\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}} + C \ldots$$ zu bestimmen.

$$S = r\int_0^x \partial x \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{(r^2-x^2)}}\right) = \int_0^y \partial y \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{r^2-y^2}}\right)$$

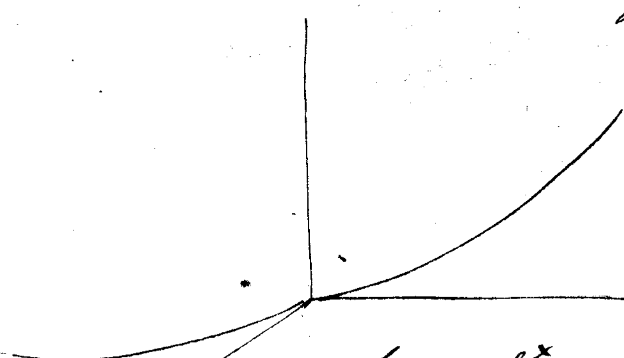
Ist für $z = \frac{2}{3}\left\{x\sqrt{\frac{x}{a}} + y\sqrt{\frac{y}{b}}\right\}$

für $x=0$ schneiden Parallelebene

für $y=0$

$z=0$ $\quad \frac{x^3}{a} + \frac{y^3}{b} = 0$

$$y = -x\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{\frac{x}{a}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{\frac{y}{b}}$$

$$S = \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\sqrt{1+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$$

$$S = \frac{2}{3}b\int_{x_0}^{x}\partial x\left\{1+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right\}^{\frac{3}{2}}$$ von 0 bis y genommen

$$S = \frac{2}{3}b\int_0^x \partial x\left\{\left(1+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$S = \frac{4}{15}ab\left\{\left(1+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{\frac{5}{2}} - \left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{5}{2}}\right\}$$ von 0 bis x genommen

$$S = \frac{4}{15}ab\left\{\left(1+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{\frac{5}{2}} - \left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{5}{2}} - \left(1+\frac{y}{b}\right)^{\frac{5}{2}} + 1\right\}$$

Dieser Ausdruck bleibt real für negative x u. y, welche beziehungsweise dem absoluten Werth nach kleiner als a u. b sind, während für kein negatives x, z nur real wird

Die Projection der, das zu findende Flächenstück begrenzenden Curve sei gegeben, durch ihre Gl. in der xy Ebene. – Man soll den Inhalt des Flächenstückes finden.
Die Grenzen sind nicht mehr, wie bei der Cubatur von einander unabhängig, u. ihre Bestimmung geschieht ähnlich wie dort.
Die Gl. der Kugel sei gegeben.

$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. Die Begrenzung in der xy Ebene sei ein Kreis, seine größten Kreis. Seine Gleichung also $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

folgl. $S = 2\int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$ unbestimmt integr.

$\arc\sin\left(\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)$. zwischen den Grenzen genommen: erhält man $\frac{\pi}{2}$ folglich $\frac{1}{4} S = r\frac{\pi}{2}\int_0^r dx = \frac{r^2\pi}{2}$

Demnach die ganze Kugel $= 4r^2\pi$.

2. Die Fläche sei ein Ellipsoid.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ folgl.

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{cx}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{cy}{b^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$

folgl. $S = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1 + \frac{c^2x^2}{a^4 - a^2x^2 - \frac{a^4}{b^2}\cdot y^2} + \frac{c^2y^2}{b^2 - \frac{b^4}{a^2}x^2 - b^2y^2}}$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist:

$$1 + \frac{b^2c^2x^2\cdot b^2}{b^2a^2(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2)} + \frac{a^2c^2y^2\cdot a^2}{b^2(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2)a^2}$$

$$= \frac{a^4b^4 - a^2b^4x^2 - a^4b^2y^2 + b^4c^2x^2 + a^4c^2y^2}{a^2b^2(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2)}$$

$\frac{a^2-c^2}{a^2} = k^2$ und $\frac{b^2-c^2}{b^2} = l^2$ so erhält man

$S = \iint dx\, dy \sqrt{\frac{1 - k^2\frac{x^2}{a^2} - l^2\frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$

Nach y von bis $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ u. nach x von 0 bis a

und es scheint, als ob sich

das Doppelintegral auf kein einfaches reduciren lasse. Diese Reduction gelingt jedoch, wenn man von einer andern Eintheilung des Raumes ausgeht.

(auch Lobatto 3) Dirichlet ging dabei von folgender Betrachtung aus. Offenbar lassen sich ∞ viele Werthe von x u. y ~~Werthe~~ angeben, für welche der Quadratwurzelausdruck

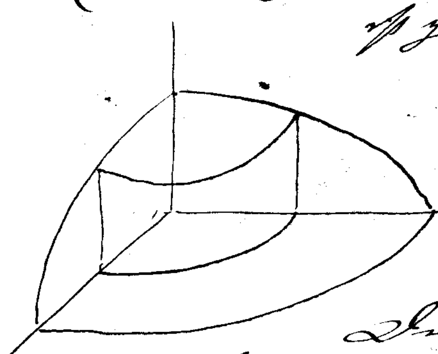
$$\rho = \sqrt{\frac{1 - k^2\frac{x^2}{a^2} - l^2\frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

sich nicht ändert. Diese Werthe stehen in folgendem Zusammenhang

$$(\rho^2 - k^2)\frac{x^2}{a^2} + (\rho^2 - l^2)\frac{y^2}{b^2} = \rho^2 - 1 \quad \text{oder}$$

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{\rho^2-1}{\rho^2-k^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{\rho^2-1}{\rho^2-l^2}}\right)^2} = 1$$

Wenn man also über einer Ellipse deren Axen $a\sqrt{\frac{\rho^2-1}{\rho^2-k^2}}$ u. $b\sqrt{\frac{\rho^2-1}{\rho^2-l^2}}$ sind, eine Cylinderfläche errichtet so schneidet diese das Ellipsoid längs einer Curve in welcher alle Punkte der Fläche constante Neigung haben (und zwar $\rho = \sec i$) — Der Inhalt dieser Ellipse ist gleich $\frac{\pi}{4} ab \frac{\rho^2 - 1}{\sqrt{(\rho^2-k^2)(\rho^2-l^2)}} = R$



Läßt man nun die Halbaxen ∞ wenig sich ändern, so ist dR = der Projection des Streifens auf dem Ellipsoid in dessen Punkten die Neigung der tangirenden Ebene constant ist. Der Inhalt dieses Streifens ist $\rho\frac{dR}{d\rho}.d\rho$ folglich, wenn man alle Streifen summirt oder integrirt nach ρ zwischen den Grenzen ~~[illegible]~~ nach ρ, 1 u. ∞. So erfolgt $S = \int_1^\infty \rho\frac{\partial R}{\partial \rho}.d\rho$ und die Reduction ist gelungen.

Catalan hat dagegen auf folgende Weise verfahren. Da $S = \iint \rho\, dx.dy$ auch als die Cubatur einer kr. Oberfläche betrachtet werden kann, deren Ordinate $= \rho$ ist und deren Gl. wie

$(\rho^2 - k^2)\frac{x^2}{a^2} + (\rho^2 - l^2)\frac{y^2}{b^2} = \rho^2 - 1$ ist, so schneide der

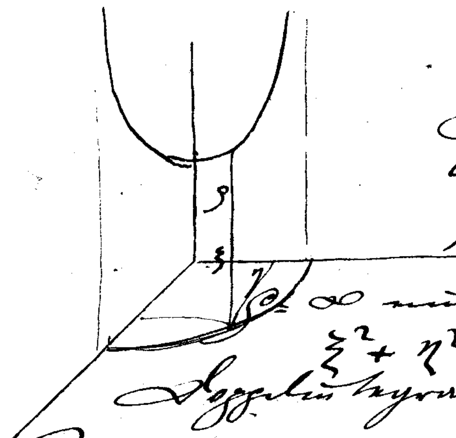
Bezeichnungen $\frac{x}{a} = \xi$ u. $\frac{y}{b} = \eta$, woraus folgt.

$S = ab \iint \rho \, d\xi \, d\eta$ und die Gl.

$(\rho^2 - k^2)\xi^2 + (\rho^2 - l^2)\eta^2 = \rho^2 - 1$ u. wobei wir die Integrationsgrenzen durch die Gl. $\xi^2 + \eta^2 = 1$ bestimmt sind. bei $\eta = 0$ ist $(\rho^2 - k^2)\xi^2 = \rho^2 - 1$

(u. $\rho^2(\xi^2 - 1) = k^2\xi^2 - 1$ $\qquad \rho = \sqrt{\frac{1-k^2\xi^2}{1-\xi^2}}$

$\rho = \sqrt{\frac{1-l^2\eta^2}{1-\eta^2}}$ für $\xi = 0$



Sucht man längs der verticalen Axe ein horizontale Ebene so sind alle Durchschnitte Ellipsen, welche sich für $\rho = \infty$ einem Kreise $\xi^2 + \eta^2 = 1$ nähert. Da nun das Doppelintegral $\iint \rho \, d\xi \cdot d\eta$ als den cub. Raum betrachtet werden kann zwischen einem Rand und der xy Ebene einer Gliederfläche und der Fläche deren Ordinate $= \rho$ angesehen werden kann so kann man diesen Raum auch auf folgende Art bestimmen. Um nun das Integral von $1-\infty$ von $\int \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \cdot d\rho$ zu erhalten wäre.

$R = \frac{ab\pi}{4}\sqrt{\frac{\rho^2-1}{(\rho^2-k^2)(\rho^2-l^2)}}$. Integrirt man partiell

so ist $\int \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \cdot d\rho = \rho R - \int R \cdot d\rho$ u. man hat abgesehen von den Grenzen

$S = \frac{ab\pi}{4}\left\{\left(\frac{\rho(\rho^2-1)}{\sqrt{(\rho^2-k^2)(\rho^2-l^2)}}\right\} - \int \frac{\rho^2-1}{\sqrt{(\rho^2-k^2)(\rho^2-l^2)}} \cdot d\rho\right\}\right)$

Es sei unter der Voraussetzung daß $k > l$ oder $a > b$ u. $> c$ u. $\rho = \frac{k}{\sin\varphi}$ so sind die Grenzen von φ für $\rho = 1$ . . . . . . $\varphi = \lambda$, wenn $\sin\lambda = k$ ist, für $\rho = \infty$ . . . . $\varphi = 0$ so daß die neue Veränderliche φ zwischen 0 u. $\frac{\pi}{2}$ liegt

$\rho = \frac{k}{\sin\varphi}$. $d\rho = -\frac{k \cdot \cot\varphi \cdot d\varphi}{\sin\varphi}$ u. man erhält $S = \frac{ab\pi}{4}$(..

$$S = \frac{ab\pi}{4}\left\{\frac{k^2-\sin\varphi^2}{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2}} + \int \frac{k^2-\sin\varphi^2}{\sin\varphi^2\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2}} \cdot d\varphi\right\}$$

Da nun $\int \frac{k^2-\sin\varphi^2}{\sin\varphi^2\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2}} \cdot d\varphi = \int \frac{(k^2-l^2\sin\varphi^2)+(l^2-1)\sin\varphi^2}{\sin\varphi^2\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2}} \cdot d\varphi$

$$= \int \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^2}\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2} + (l^2-1)\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2}}$$

Da ferner $\int\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi^2}\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2} =$

$$-\operatorname{ctg}\varphi\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2} - l^2\int\frac{\cos\varphi^2}{\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2}}\cdot\partial\varphi$$

$$\int\frac{-l^2\cos\varphi^2}{\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2}} = -\int\frac{(k^2-l^2\sin\varphi^2)+l^2-k^2}{\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2}}\cdot\partial\varphi$$

$$= -(l^2-k^2)\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2}} - \int\frac{\partial\varphi\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2}}{1}$$

Und zusammengefaßt ergibt sich schließlich

$$S = \frac{ab\pi}{4}\left\{\frac{k^2-\sin\varphi}{\sin\varphi\operatorname{ctg}\varphi\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2}} - \operatorname{ctg}\varphi\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2} + (k^2-1)\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2}} - \int\partial\varphi\sqrt{k^2-l^2\sin\varphi^2}\right\}$$

Wenn man die integrirten Bestandtheile vereinigt so erhält man $\frac{k^2-1+l^2-l^2\sin\varphi^2}{k^2}\cdot\frac{tg\varphi}{\sqrt{1-\frac{l^2}{k^2}\sin\varphi^2}}$

für $\varphi=0$ wird dieser $=0$

für $\varphi=\lambda$ od. $\sin\varphi=k$, od. $\cos\varphi=\sqrt{1-k^2}$ od. $tg\varphi=\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$ erhält man

$$\frac{k^2-1+l^2(1-k^2)}{k}\cdot\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-l^2}} = -\frac{(1-k^2)(1-l^2)}{\sqrt{(1-k^2)(1-l^2)}} =$$

$= -\sqrt{(1-k^2)(1-l^2)}$ da aber $k^2=1-\frac{c^2}{a^2}$ u. $l^2=1-\frac{c^2}{b^2}$

so ist $1-k^2=\frac{c^2}{a^2}$ u. $1-l^2=\frac{c^2}{b^2}$

u. demnach dieser $= -\frac{c^2}{ab}$ folglich wenn man diesen Werth neg. nimmt (da er der untere Grenze) und die beiden Integrale v. λ bis 0 oder wenn man ihr Zeichen ändert von 0 bis λ nimmt, wenn man ferner den Ausdruck mit 8 multiplizirt so ergibt sich schließlich für das zugehörige Ellipsoid die ganze Oberfläche:

$$S = 2\pi\cdot c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left\{(a^2-c^2)\int_0^\lambda\partial\varphi\sqrt{1-\chi^2\sin\varphi^2}+c^2\int_0^\lambda\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-\chi^2\sin\varphi^2}}\right\}$$

wobei Kappa $\chi = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}$ ist u. $\lambda = \arcsin k$

{Das 3te Integr. der ellipt. Funktion ist

$$\int_0^\lambda \frac{\partial\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\sqrt{1-\chi^2\sin\varphi^2}}$$ (Integr. 3ter Gattung).}

Die beiden übrigbleibenden Integrale sind in endlicher Form nicht auflösbar und lassen sich auch nicht auf einander zurückführen. Sie sind die 2 Grundformen der sogenannten Elliptischen Funktionen welche sich, wie Legendre gezeigt hat auf die Funktionen $F(\lambda\chi)=\int_0^\lambda \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-\chi^2\sin\varphi^2}}$, $E(\lambda\chi)=\int_0^\lambda \partial\varphi\sqrt{1-\chi^2\sin\varphi^2}$, und daraus

$$\Pi(\lambda,n,\chi)=\int_0^\lambda \frac{\partial\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\sqrt{1-\chi^2\sin\varphi^2}}$$ zurückführen lassen und welche man elliptische Integrale der ersten zweiten und 3ten Gattung nennt. Auf sie lassen sich alle Integrale von der Form $\int\varphi(x,y).\partial x$ zurückführen, wenn φ eine rationale Funktion von x und y und y die Variable der Wurzel ist der auf den 4ten Grad steigt.

Integration der Differenzialformeln mit mehreren Variabeln.

In der Integralrechnung beschäftigt man sich zuerst mit der Integration der einfachsten Differenzialformeln $\varphi(x)\partial x$, welche nur von einer einzigen Variabeln abhängt und nur mit der ersten Potenz des Differenzials ∂x multiplicirt ist. Ihr entspricht immer ein Integral, wenn auch nur in Form der Reihen oder jede Summe der Ordinaten φx ist jetzt einen Flächenraum. Wir beschäftigen uns ferner mit der Integration der Differenzialformeln $\varphi(xy)\partial x\partial y$ welche von 2 unabhängigen Veränderlichen x und y abhängt und vom 2ten Grad ist. Man nennt diese der Form einen mehrgliedrige Differenzialformel des 2ten Grades mit 2 Variabeln auch sie hat immer ein Integral, weil jede krumme Oberfläche deren Ordinate $\varphi(xy)$ ist einen bestimmten cubischen Raum mit der xy Ebene einschließt. Sofort ist leicht einzusehen, daß ohne weitere Bedingung jede eingliedrige Differenzialformel $\varphi(xyz)\partial x^n.\partial y^m.\partial z^p$...

ein Integral hat. Nicht so verhält es sich bei unvollständigen Differenzialformeln. Wir beschäftigen uns zunächst mit der zweigliedrigen Formeln mit 2 unabhängigen Variabeln

$\varphi(x,y)\,\partial x + \psi(x,y)\,\partial y$ ab

Und wenn immer von der Integration dieser Formeln die Rede ist, eine Funktion $u(x,y)$ verlangt welche den gegebenen Ausdruck zum Differenzial hat. Denken wir uns dieselbe, so ist ihr totales Differenzial bekanntlich gleich

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial y$ ab muß also nothwendig sein

$$\varphi(x,y)\,\partial x + \psi(x,y)\,\partial y = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial y$$ oder

$$\left(\varphi(x,y) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)\partial x + \left(\psi(x,y) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\partial y = 0$$, woraus, wegen der Unabhängigkeit von ∂x u. ∂y erfordert, daß jeder Coefficient für sich 0 sei, es muß also

$\varphi(xy) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ u. $\psi(xy) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$. Die hierin für die Form der φ u. ψ liegende Bedingung läßt sich in dieser Form nicht untersuchen, weil u unbekannt ist. Der bekannte Satz jedoch, daß man dasselbe erhält, wenn man u zuerst nach x u. dann nach y od. zuerst nach y u. dann nach x differenzirt, d. h. daß

$\frac{\partial^2 u}{\partial x y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, führt sogleich zur neuen Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x}.$$ Diese Gleichung muß also erfüllt werden, wenn eine Funktion u als Integral der vorgelegten Differenzialformeln existiren soll. Die ist nothwendig, ob sie aber auch hinreichend sei muß die Folge zeigen, wenn wir das Integral entwickelt haben werden. Aus der Gl.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(xy)$ folgt, wenn man nach x integrirt

$u = \int\varphi(xy)\,\partial x + \eta$, wo η nach x constant aber im Allgemeinen eine Funktion v. y ist. Um sie zu bestimmen hat man $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial\int\varphi(xy)\,\partial x}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y}$ woraus, da $\frac{\partial u}{\partial y} = \psi(xy)$ alsobald folgt

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \psi(xy) - \frac{\partial\int\varphi(xy)\,\partial x}{\partial y}$$, woraus

$$\eta = \int\left(\psi(xy) - \frac{\partial\int\varphi(x,y)\,\partial x}{\partial y}\right)\partial y + C$$ und es ist also

da $u = \int\varphi(xy)\,\partial x + \eta$

$$u = \int\varphi(xy)\,\partial x + \int\left(\psi(xy) - \frac{\partial\int\varphi(xy)\,\partial x}{\partial y}\right)\partial y + C$$

Die Existenz dieser Gleichung erfordert offenbar nur, daß η nach x constant sei, oder, daß $\frac{\partial\eta}{\partial x}=0$ oder, daß $\int\left(\frac{\partial\psi(xy)}{\partial x}-\frac{\partial\varphi(xy)}{\partial y}\right)\partial y=0$ oder also, daß $\frac{\partial\psi(xy)}{\partial x}=\frac{\partial\varphi(xy)}{\partial y}$. Diese Bedingung stimmt mit der obigen überein, und, wenn sie erfüllt ist so existirt auch das Integral

Sie muß aber eine identisch erfüllt werden

$$u=\int\varphi(xy)\partial x+\int\left\{\psi(xy)-\frac{\partial\int\varphi(xy)\partial x}{\partial y}\right\}\partial y+C$$

$$u=\int\psi(xy)\partial y+\int\left\{\varphi(xy)-\frac{\partial\int\psi(xy)\partial y}{\partial x}\right\}\partial x+C$$

Ueber die Formel für u ist folgendes zu bemerken. Die Differenziation des Integrals $\int\varphi(xy)\partial x$ nach y kann bekanntlich auch unter dem Integralzeichen ausgeführt werden, so daß man auch schreiben kann

$$\eta=\int\left\{\psi(xy)-\int\frac{\partial\varphi(xy)}{\partial y}\partial x\right\}\partial y+C$$

Darf nicht angenommen werden, daß die Differenziation und die darauf folgende Integration des Integrals $\int\varphi(xy)\partial x$ nach y einander völlig aufheben, wodurch sich u auf $\int\psi(xy)\partial x.\partial y+C$ reducirt. Denn es ist hier in Bezug auf die Glieder dieses Integralausdrucks, die nur x enthalten, nicht einerlei ob man, wie oben geschieht, zuerst nach y differenzirt und erst dann differenzirt oder ob man umgekehrt verfährt. In dem ersten Fall verschwinden diese Glieder, im zweiten nicht. So daß man also nicht $\frac{\partial\int\varphi(xy)\partial x}{\partial y}.\partial y$ mit $\int\varphi(xy).\partial x$ identificiren darf.

Beispiel. Man soll die Formel $(2x+y)\partial x+(2y+x)\partial y$ integriren $\frac{\partial(2x+y)}{\partial y}=\frac{\partial(2y+x)}{\partial x}=1$

$$u=\int(2x+y)\partial x+\int\left\{2y+x-\frac{\partial\int(2x+y).\partial x}{\partial y}\right\}\partial y$$

$$u=x^2+xy+\int(2y+x-x)\partial y=x^2+xy+y^2+C$$

2s Beispiel. $y\,\partial x-x\,\partial y$ da $\frac{\partial y}{\partial y}=1$ u. $\frac{\partial(-x)}{\partial x}=-1$ so ist die Formel nicht integrabel.

Sie wird jedoch auf der Stelle integrabel, wenn man sich vornimmt $\frac{y}{x^2+y^2}\partial x-\frac{x}{x^2+y^2}.\partial y$ Denn

$$\frac{\partial \frac{y}{x^2+y^2}}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{u.} \quad \frac{\partial \frac{x}{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Man erhält

$$u = \int \frac{y\,dx}{x^2+y^2} + \int \left\{ -\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial \int \frac{y\,dx}{x^2+y^2}}{dy} \right\} dy$$

$$u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \int \left\{ -\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} \right) dy$$

demnach $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \text{Const}$

3) Beispiel. $y^2\,dx - x^2\,dy$

$\frac{2y\,dy}{dy}$ $\frac{2x\,dx}{dx}$ ist also nicht integrabel. es wird es aber, wenn man durch xy dividirt denn alsdann ist $u = l\frac{x}{y}$.

4) Beispiel.

$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy$ $\quad u = \int\frac{dx}{x} + \int\left(\frac{1}{y} - \frac{\partial\int\frac{dx}{x}}{dy}\right)dy$

$u = l(xy)$

Man kann dem Integral u eine andere Darstellung geben, wenn man bemerkt, daß u im Allgemeinen aus 2 verschiedenartigen Arten von Ausdrücken bestehen kann, nämlich solche, welche x u. y zugleich, und solche, die entweder nur x oder nur y enthalten und daß also der partielle Differenzialquotient $\frac{du}{dx}$ nur von jenen Gliedern nicht afficirt wird, welche ausschließlich y enthalten, u. daß $\frac{du}{dy}$ dagegen alle Glieder enthält, die nur von y abhängen

$$u = \int\varphi(x,y)\,dx + \int\psi_0(y)\,dy \qquad u = \int\psi(x,y)\,dy + \int\varphi_0(x)\,dx$$

Bildet man nun $\int\varphi(x,y)\,dx$, so erhält man wieder alle Glieder von u, welche nur x oder x u. y enthalten. Die nur von y abhängigen Glieder aber fehlen darin; Um sie zu ergänzen suche man aus $\psi(xy)$ die Glieder heraus, welche nur y enthalten od. nur constant sind. Ihr Aggregat sei nun $\psi_0(y)$ so wird man haben

$$u = \int\varphi(xy)\,dx + \int\psi_0(y)\,dy + C.$$

oder wenn man ebenso $\varphi_0(x)$ die Glieder von $\varphi(xy)$ bezeichnet, welche nur x enthalten oder constant sind; so ist $u=\int\Psi(xy)\,dy+\int\varphi_0(x)\,dx+C$

2. Bsp. $\left\{\frac{1}{x}+\frac{y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\right\}dx+\left\{\frac{1}{2y}-\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\right\}dy$

Diese Formel ist integrabel.

Setzt man nun $\varphi(xy)=\frac{1}{x}+\frac{y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}$

u. $\Psi_0(y)=\frac{1}{2y}$

Folgl. $u=lx-\frac{y^2}{2x^2}+y\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{x^2+y^2}+\frac{1}{2}ly+C$

Nach der bekannten Reductionsformel hat man

$$\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{x^2+y^2}=-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2}+\frac{1}{2y}\,l\,\frac{-y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

u. endlich

$$u=-\frac{y(y+\sqrt{x^2+y^2})}{2x^2}+\frac{1}{2}\,l(yx-x\sqrt{x^2+y^2})+C$$

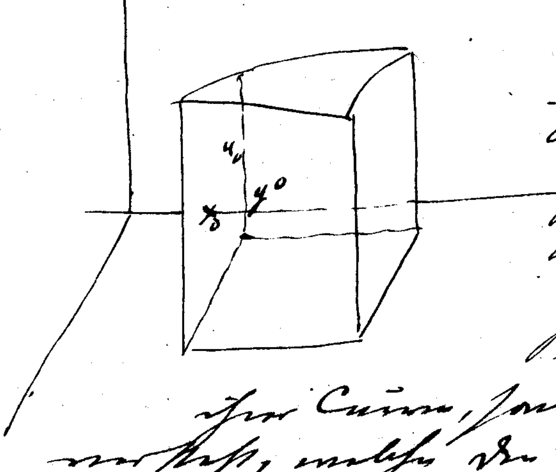
Als specieller Fall unterscheide man die Formel $\varphi(x)dx+\Psi(y)dy$, welche immer integrabel ist. Für ihr Integral erhält man also nach der obigen Methode

$$u=\int\varphi(x)\,dx+\int\Psi(y)\,dy+C$$

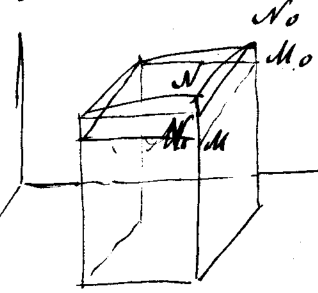
Z.B. $\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1-y^2}$ $\qquad u=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\,l(1-y^2)+C$

2. $ax^m dx+by^n dy$ $\qquad u=\frac{ax^{m+1}}{m+1}+\frac{by^{n+1}}{n+1}+C$

Eine dritte Darstellung unserer obigen Aufgabe ergibt sich einfach aus einer geometrischen Betrachtung. Denkt man sich nämlich, es sei u das gesuchte Integral, die Ordinate einer krummen Oberfläche der Absciss. x u. y, so seien y_0 x_0 u. u_0 die Coordinaten irgend eines willk. Punktes. Stellt man an der Bedeutung der partiel. Differentialquotienten fest u. erinnert sich ferner noch, daß man unter dem bestimmten Integral einer Function nicht nur den Flächenraum einer Curve, sondern auch die Differenz der Ordinaten versteht, welche den beiden Grenzen entsprechen.



So ist klar, daß, wenn man die Function $\varphi(x y_0)$ nach x von x_0 bis x integrirt das Integral die Ordinatendifferenz $M_0 N_0$



und daß, wenn man die Fct $\psi(x y)$ nach y zwischen y_0 u. y integriren, das Integral die Ordinatendifferenz $N_1 N$, darstellt, so daß

$$u = u_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(x y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} \psi(x y)\, dy$$

Schlägt man den Weg $\parallel$ zu yz dann $\parallel$ xz ein, so ergibt sich auf gleiche Weise

$$u = u_0 + \int_{y_0}^{y} \psi(x_0 y)\, dy + \int_{x_0}^{x} \varphi(x y)\, dx$$

Die beiden Werthe von u müssen, wenn eine krumme Oberfläche existiren soll, identisch einander gleich sein, d. h. für alle beliebigen Werthe von x_0, y_0, x, y. Es müssen also die Fctnen φ u. ψ so beschaffen sein, daß die Gl.

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} \psi(x y)\, dy = \int_{y_0}^{y} \psi(x_0 y)\, dy + \int_{x_0}^{x} \varphi(x y)\, dx$$

identisch stattfindet.

Um die hierin liegende Bedingung zu erhalten differenziren man dieselbe partial nach y, so folgt:

$$\psi(xy) = \psi(x_0 y) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}\, dx$$

$$\varphi(x y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial \psi(x y)}{\partial x}\, dy = \varphi(x y)$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial \psi(y x)}{\partial y}\, dx = \psi(xy) - \psi(x_0 y) \quad \text{u.} \quad \int_{y_0}^{y} \frac{\partial \psi(x y)}{\partial x}\, dy = \varphi(xy) - \varphi(x y_0)$$

welche Gl. nur bestehen kann, wenn

$$\frac{\partial \psi(x y)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(x y)}{\partial y}$$

Geometrisch kann man diese Bedingung aus dem Umstand ableiten, daß die beiden Ordinaten u dann einander gleich sein werden, wenn die beiden Flächen im einen Punkte x_0, y_0, u_0 mit gemeinsam zusammenfallen, und die tangirenden Ebenen im Punkte x, y, u einander parallel sein, welche letzten Bedingung darauf hinaus kommt, daß die Tangenten an die Parallelschnitte gegenseitig parallel oder also, daß $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$

der beiden Flächen beziehungsweise nach einander gleich sind.

Beispiel: $\frac{\partial x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{dy}{y}$ die Bedingung der Integrabilität ist erfüllt, denn man hat

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$, u. man hat

$$u = u_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$ oder

$$u = l(x+\sqrt{x^2+y_0^2}) + ly - x\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y\sqrt{x^2+y^2}}$$ und da

$$- l(x_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2}) - ly_0 + u_0$$

$$x\int\frac{dy}{y\sqrt{x^2+y^2}} = \int \frac{\frac{dy.x}{y^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}} = -l\left(\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\right)$$ und zwischen

den Grenzen genommen erhält man $u = l(x+\sqrt{x^2+y^2}) + u_0 - l(x_0+\sqrt{y_0^2+x_0^2}) = l(x+\sqrt{x^2+y^2}) + C$

Die 2 willkürlichen Constanten werden sich immer von den veränderlichen x u. y vollständig trennen lassen u. schließlich sich zu einer einzigen willkürlichen Constante vereinigen.

Integration der Differenzialgl. mit 2 Veränderl.

Unter einer Differenzialgl. zwischen 2 Veränderlichen verstehen wir eine Relation zwischen der Veränderl. x der Fct y derselben und deren Differenzialquotienten nach y. Das allgemeine Bild einer solchen Differenzgl. ist also

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots) = 0$$ die Aufgabe ist

diese Gl. zu integrieren, d. h. heißt eine neue Gl. $F(xy)=0$ zwischen x u. y, oder $y = f(x)$ derart zu finden, so daß, dieses y durch x ausgedr. in die gegeb. Differenzialgl. substituirt, dieselbe in eine identische verwandelt, so dass man hat $F(x\ f(x)\ f'(x), f''(x) \dots) = 0$ identisch für jedes x. Die so definirte Relation $F(xy) = 0$ oder erklärt $y = f(x)$ wird das Integral oder die Lösg

der vorstehenden Differentialgl. genannt (Jacobi).
Man hat die Differenzialgleichungen nach Ordg. u. Grad eingetheilt u. gesagt, sie sei vom m^t Grad u. der n^t Ordg., wenn m die höchste vorkommende Potenz eines Differentialquotienten und n die höchste Ordnungszahl desselben ist. So ist

$(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}=0$ von der ersten Ordg. u. ersten Grad

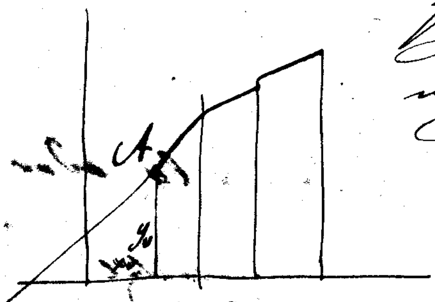
$(y+l(x))\frac{d^2y}{dx^2}+x\sin y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$ von der 2^t Ord. u. 2 Grad

Man betrachtet die Aufgabe als gelöst, wenn dieselbe auf eine einfache Integration u. Quadratur oder mehreren successiven Integrationen zurückzuführen lässt.
Wegen der Schwierigkeit des Problems ist es nothwendig dasselbe in seine einfachsten Specialitäten aufzulösen u. wir beginnen daher mit der Integration der Differentialgl. 1^t Ordg. u. 1^t Grades. — Die allgemeinste Form dieser Gl. ist $\varphi(xy)+\psi(xy)\frac{dy}{dx}=0$

oder $\varphi(xy)\cdot dx+\psi(xy)\,dy=0$ Es ist also hier verlangt dass die Differentialformel, welche früher betrachtet worden ist für alle Werthe v. x u. zugehörigen Werthe von y eine derartige Bedingung, das Integral nur noch von einer Veränderlichen abhängt, oder dass u = Const. was geometrisch heisst. Man verlangt nur die Gl. des Horizontalschnittes, welcher in der Entfernung = C von der xy Ebene durch die Räume Abgestl. geführt wird, deren allgem. Ordinate u. den obigen Ausdruck zur Differenzialformel hat. Die Integration unserer Integralgleichg. ist also ein Problem der Ebene, obschon die Differenzialformel, wenn sie nicht = 0 sein soll häufig nicht integrabel ist, so ist sie doch = 0 gesetzt stets integrabel, wenn auch φ u. ψ die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllen was seinen Grund einfach darin hat, dass man die Differentialgl. mit einer beliebigen Fct von x u. y multipliciren und diese Function dann so bestimmen kann, dass nun die Bedingung $\frac{d\mu\varphi(xy)}{dy}=\frac{d\mu\psi(xy)}{dx}$, während, welches die Differentialgleichung gegeben ist u. nicht

nicht so erledigt werden darf. Die Lösung ist gibt die umfassende Theorie der Calculations-Modulators [illegible]. Indessen kann man leicht geometrisch zeigen, daß eine Differentialgl. die Abgeschlossenheit ein Integral zuläßt d.h. daß man immer auch eine numerische Stelle einen Zusammenhang zwischen den Werthen v. x u. y angeben kann, welcher der Differentialgl. entspricht. Nämlich man erhält aus Gl. $\varphi(xy) + \psi(xy)\frac{dy}{dx} = 0$ unmittelbar $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi(xy)}{\psi(xy)} = f(xy)$

Man wähle in der Ebene einen willkürlichen Anfangspunkt A dessen Coordinaten x_0, y_0 sind,



so ergibt sich die [illegible] Tangente der Neigung der gesuchten Curve in diesem Punkt $= f x_0 y_0$. Man nehme nun sehr nahe aufeinanderfolgende Abscissen $x_0\, x_1 \dots x_{n-1}\, x_n$ an so handelt es sich darum die entsprechenden Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \dots y_n$ zu finden. Nun ist, wenn man die Curve zunächst als Polygon betrachtet $y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)(f x_0 y_0)$

$$y_2 = y_1 + (x_2 - x_1)\, f x_1 y_1$$
$$\vdots$$
$$y_n = y_{n-1} + (x_n - x_{n-1})(f x_{n-1} y_{n-1})$$

Man kann also für jedes gegebene x das zugeh. y berechnen, mit jeder beliebigen Genauigkeit. In dieser Gl. sind nur scheinbar 2 willkürliche Constanten x_0 u y_0 enthalten, nämlich nur y_0 ist willkürlich, weil man zu einer gegebenen Abscisse immer noch eine ~~willk.~~ die Ordinate willkürlich annehmen kann. Diese Constante aber bestimmt nicht nur die Lage der Curve, sondern auch die Gestalt. Wäre nämlich gegeben $\frac{dy}{dx} = f(x)$ so wäre nur ersterer der Fall da aber $\frac{dy}{dx} = f(xy)$ gegeb. ist so variirt die willk. Constante häufig auch auf die Gestalt der Curve. Was nun die Integration einer ~~Integralform~~ Diff. Gl. betrifft so ist klar daß dieselbe möglichst nach den früheren Formeln geleistet werden kann, wenn

Die Differenzialformel $\varphi(xy)dx + \psi(xy)dy$ integr. ist, wenn hat man für u eine willkürliche const. zuzusetzen. Vorausgesetzt, es sei dies der Fall, so kann man das Integral auf folgende 3 Darstellg. finden.

$$\text{I. Constante} = \int \varphi(xy)dx + \int \left\{ \psi(xy) - \frac{\partial \int \varphi(xy)\cdot dx}{\partial y} \right\} dy$$

$$\text{II. Const} = \int \varphi(xy)dx + \int \psi_0(y)\, dy$$

$$\text{III. Const} = \int_{x_0}^{x} \varphi(x y_0) dx + \int_{y_0}^{y} \psi(xy)\, dy$$

Beisp. $\left(\frac{y}{x} - ly\right)dx + \left(lx - \frac{x}{y}\right)dy = 0$

Man erhält bei Anwendung der Integrabilitätsbedingung $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

In Formel II ist $\psi_0(y) = 0$ u. man hat

$\text{Const} = \int\left(\frac{y}{x} - ly\right)dx$ od. $C = y\,lx - x\,ly$ oder

$y^{x} \cdot e^{C} = x^{y}$.

2. $(x^2 - ay)dx + (y^2 - ax)dy = 0$ (integrabel $-a = -a$)

Nach III hat man $C = \int_{x_0}^{x} (x^2 - ay_0)dx + \int_{y_0}^{y} (y^2 - ax)dy$

$$C = \frac{x^3+y^3}{3} - a(xy_0 + y_0) - x_0^3 + a x_0 y_0$$

$$= \frac{x^3+y^3}{3} - a\,xy - \frac{x_0^3}{3} + a\, x_0 y_0 - \frac{y_0^3}{3}$$

$C = \frac{x^3+y^3}{3} - axy$ Allgemein

Selten jedoch ist die vorgelegte Differentialgl. unmittelbar integrabel u. muss man dieselbe erst durch Anwendung gewisser Hilfsmittel, welche entweder in einer Umformung mit der Einführung neuer Grössen bestehen, integrabel machen. Das allg. Mittel d. Art besteht in der Bestimmung des oben bezeichneten Multiplicators, welcher, wie gezeigt wurde der Differenzialgleichung

$$\frac{\partial \mu \varphi(xy)}{\partial y} = \frac{\partial \mu \psi(xy)}{\partial x}$$

Die Auffindung desselben jedoch gelingt nur in wenigen Fällen u. scheint oft schwieriger, als die Integration der Differentialgl. selber ist hier nämlich von der Vergleichung zweier Gleichungen die Rede sein kann, woraus sich keine Schlüsse ziehen läßt. Und der allgemeinen Methode gibt es jedoch einige specielle Verfahrungsarten durch welche sich in speciellen Fällen die Variabeln separiren, so daß die Differenzialgl. unter der Form erscheint u. sich sogleich integriren

$$f(\xi)d(\xi) + \Phi(\eta)\,d\eta = 0$$

~~läßt~~ läßt u. die Aufgabe ist auf 2 Quadraturen zurückgeführt.

$$C = \int f(\xi)\,d\xi + \int \Phi(\eta)\,d\eta$$

Solche speciellen Fälle in welchen die Trennung der Variabeln gelingt sind folgende.

I. Es sei X, X_1, Y, Y_1 Funct. resp. von x u. y (oder Const.) und es sei die Differenzialgl. gegeben

$$X_1 Y\,dx + X Y_1\,dy = 0$$

die Trennung gelingt sogleich wenn man dieselbe mit dem Multipl.: $\mu = \frac{1}{XY}$ multiplicirt. Man erhält dann

$$C = \int \frac{X_1}{X}\,dx + \int \frac{Y_1}{Y}\,dy \text{ z.B.:}$$

Es sei $xy\,dx + y\sqrt{ax}\,dx + x^2\sqrt{\frac{y}{b}}\,dy = 0$
oder $y(x+\sqrt{ax})\,dx + x^2\sqrt{\frac{y}{b}}\,dy = 0$

Multipl. man mit $\frac{1}{x^2y}$, so sind die Variabeln gesondert worden.

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{a}{x}}\right)dy + \frac{dy}{\sqrt{by}} = 0 \text{ u.}$$

$$C = lx - 2\sqrt{\frac{a}{x}} + 2\sqrt{\frac{y}{b}} = l\,\text{const.}$$

oder also

$$l\sqrt{\frac{x}{c}} = \sqrt{\frac{a}{x}} - \sqrt{\frac{y}{b}},$$ wobei c eine willk. Const. ist.

2. Beispiel. $y\,dx - x\,dy = 0$ diese Gl. ist nicht integrabel, wird es aber auf der Stelle, wenn man sie mit $\frac{1}{xy}$ multiplicirt. Man erhält dann $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$ folgl. $l\frac{x}{y} = lC$ oder $x = cy$

3. Ist in der Formel I $X_1 = X'$ u. $Y_1 = Y'$ so ist das Integral der Differenzialgl.

$$X'Y\,dx + XY'\,dy = 0,$$ wie sich auf der Stelle ergibt, offenbar $XY = \text{Const.}$

Zb. Es sei gegeben $\frac{ly}{x}.dx + \frac{lx}{y}.dy = 0$ so hat man als Integr.

$lx.ly = Const.$

II. Wenn die Differentialgl. $\varphi(xy)dy + \psi(xy)dy = 0$ eine homogene ist, d. h. heißt, wenn die Functionen φ u. ψ homogene Functionen v. x u. y u. vom gleichen Grad sind, so läßt sich immer die Trennung der Variabeln bewirken. Bekanntlich versteht man unter einer homogenen Function von 2 Variabeln u. vom n^{ten} Grad eine solche Function $f(xy)$, welche die Eigenschaft hat, daß wenn man an die Stelle von x u. y setzt ρx u. ρy die keine andere Änderung erfolgt, als daß die n^{te} Potenz von ρ als Factor der ursprünglichen Function heraustritt. Diese Definition ist also dargestellt durch die Functionalgl. $f(\rho x\, \rho y) = \rho^n f(xy)$

So z. B. sind die Ausdrücke x^2+xy+y^2, $\sqrt{xy}$, $\frac{xy}{x-y}$, $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ homogene Functionen vom 2^{ten}, 1^{ten}, 1^{ten} u. -2^{ten} Grad. Man kann unter die homogenen Functionen auch noch diejenigen rechnen, welche, wenn auch F die Characteristik einer transcendenten Function bedeuten soll, der Gl. genügen

$$F(f(\rho x\, \rho y)) = F(f(xy))$$

Zb. $l\frac{x}{y}$, $\sin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$, $e^{\frac{ax}{y}}$, $\operatorname{arctg}\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}$

~~Für kann man alle~~ die Größe ρ ist ganz willkürlich, man kann also auch setzen

$\rho = \frac{1}{x}$ od. $\rho = \frac{1}{y}$ dann hat man aber die Definitionsgl. $f(xy) = x^n f(1, \frac{y}{x})$ oder $f(xy) = y^n f(\frac{x}{y}, 1)$

Vorausgesetzt nun es seien in der Differentialgl. $\varphi(xy)dx + \psi(xy)dy = 0$ die Fct. φ u. ψ homogene Fct. vom gleichen Grad, also $\varphi(xy) = x^n \varphi(1, \frac{y}{x})$ u. $\psi(xy) = x^n \psi(1, \frac{y}{x})$ so lassen sich die Variabeln der Differentialgl.

lauf auf folgende Weise kommen. Da sich dieselbe nämlich schreiben läßt

$\varphi(1,\frac{y}{x})\,dx + \psi(1,\frac{y}{x})\,dy = 0$, so folgt, wenn man setzt $\frac{y}{x} = u$ od. $y = xu$ woraus

$dy = u\,dx + x\,du$ folgt, so daß man hat

$\varphi(1,u)\,dx + \psi(1,u)\{u\,dx + x\,du\} = 0$, oder

$\{\varphi(1,u) + u\psi(1,u)\}\,dx + x\psi(1,u)\,du = 0$

Nach dem vorhergehenden Fall I. kann man die Variabeln sogleich trennen u. erhält

$\frac{dx}{x} = -\frac{\psi(1,u)\,du}{\varphi(1,u+u\psi(1,u)}$ u. integrirt

$lx = -\int\frac{\psi(1,u)}{\varphi(1,u+u\psi(1,u)}\,du + C$, wenn also die Bedingungen der Homogenität erfüllt sind, so braucht man nur in φ u. ψ zu setzen 1, an die Stelle von x, u. u an der Stelle von y zu setzen, so erhält man sogleich das Integral. Schließlich ist alsdann nur der $\frac{y}{x}$ für u zu setzen. Analog hiezu würde man durch die Substitution $\frac{x}{y} = v$ erhalten

$ly = -\int\frac{\varphi(v,1)}{\psi(v,1)+v\psi(v,1)}\,dv + C$.

Beispiel. 1. Sei gegeben $(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx - x\,dy = 0$ die Differentialgleichung ist homogen vom 1. Grad.

u. $\varphi(xy) = y+\sqrt{x^2+y^2}$. $\quad\varphi(1u) = u+\sqrt{1+u^2}$

$\psi(xy) = -x \qquad \psi(1,u) = -1$

$lx = -\int\frac{-1}{u+\sqrt{1+u^2}-u} = \int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = l(u+\sqrt{1+u^2}) + lC$

also ist $\quad l\frac{x}{u+\sqrt{1+u^2}} = lC$ u. da $u = \frac{y}{x}$, so wird man finden $(y+c)^2 = x^2+y^2$ oder

$x^2 - 2cy - c^2 = 0$ als Integralgleichung

2. Beispiel. Gegeben sei $x\,dx + y\,dy = my\,dx$ oder $(x-my)\,dx + y\,dy = 0$ folglich

$\varphi(1,u) = (1-mu) \qquad \psi(1,u) = u$

folglich $lx = -\int\frac{u}{1-mu+u^2}\,du = -\int\frac{u\,du}{u^2-mu+1} + lC$.

oder $l\frac{x}{c} + \frac{1}{2}\int\frac{2u-m}{u^2-mu+1}\,du + \frac{m}{2}\int\frac{du}{u^2-mu+1} = 0$

oder $l\frac{x}{c} + \frac{1}{2}\,l(u^2-mu+1) + \frac{m}{2}\int\frac{du}{u^2-mu+1} = 0$

Setzt man in dem integrirten Theil $\frac{y}{x}$ für u wieder ein, so kommt die Gl.

$$l\frac{\sqrt{y^2-mxy+x^2}}{c} + \frac{m}{2}\int\frac{du}{u^2-mu+1} = 0$$

Das übrig bleibende Integral erledigt sich nach den früheren Formeln, welche die Unterscheidung verlangen, ob $m \gtreqless 2$ ist

3. Ein etwas allgemeineres Beispiel ist

$$(ax+by)\,dx + (\alpha x+\beta y)\,dy = 0$$

hier ist $\varphi(v,1) = av+b$ und man hat

$\psi(v,1) = \alpha v+\beta$ $\quad l\frac{y}{c} + \int\frac{av+b}{av^2+(\alpha+\beta)v+\beta}\,dv = 0$

dann ist $v = \frac{x}{y}$. Die Ausführung des Integrals erfordert die Unterscheidung der 3 Fälle $\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)^2 - a\beta \gtreqless 0$

4. Beispiel. Die Differentialformel

$(ax+by+c)\,dx + (\alpha x+\beta y+\gamma)\,dy = 0$ ist nicht homogen, lässt sich aber durch eine Transformation homogen machen. Man setze nämlich

$x = \xi + A$ und $y = \eta + B$, so ergibt sich

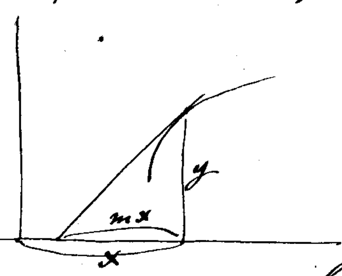
$(a\xi+b\eta)\,d\xi + (\alpha\xi+\beta\eta)\,d\eta = 0$

vorausgesetzt, daß man A und B aus den beiden Gl. $aA + bB + c = 0$ und

$\alpha A + \beta B + \gamma = 0$ bestimmt, woraus folgt $A = +\frac{b\gamma-\beta c}{a\beta-\alpha b}$ und $B = -\frac{a\gamma-\alpha c}{a\beta-\alpha b}$

Die Integration ist auf den vorigen Fall zurückgeführt.

2. Man soll die Gl. der Curve finden, welche die Eigenschaft hat, daß in allen Punkten die Subtangente die $m$fachen Abscisse. Der allgem. Ausdruck der Subtangente ist bekanntlich

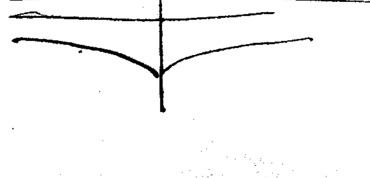


$y\frac{dx}{dy}$ u. man hat also die Gl.
$$mx = y\frac{dx}{dy} \quad \text{oder} \quad ydx - mxdy = 0$$
und wenn man die Var. trennt $\frac{dx}{mx} - \frac{dy}{y} = 0$ u. integrirt
$$lx = mly \quad \text{od.} \quad \frac{1}{m}lx = ly - \frac{1}{m}lC$$
und daher $y = \sqrt[m]{Cx}$ welche Gl. alle Parabeln umfaßt. Soll $m = 2$ sein, so ist $y = \sqrt{Cx}$ die gemeine Parabel.

3. Man verlangt die Gl. der Curve bei welcher die Tangente die mittlere Proportionale aus der Ordinate u. einer gegebenen Linie a ist. Die Tangente hat zum Ausdruck $y\left(\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right)$ und die Aufgabe liefert die Gl.
$$ay = tg^2 = y^2\left(1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right) \quad \text{oder}$$
$$\frac{a-y}{y} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \quad \text{oder} \quad dx = dy\sqrt{\frac{a-y}{y}} \quad \text{od.} \quad x = \int\sqrt{\frac{a-y}{y}}.dy$$
Man setze $y = z^2$ so verwandelt sich das Integral in.
$$x = 2\int\sqrt{(a-z^2)}.dz \quad \text{oder.} \quad x = z\sqrt{a-z^2} + a\arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{a}}\right) + C$$
oder endlich $x = \sqrt{ay-y^2} + a\arcsin\sqrt{\frac{y}{a}} + Const$

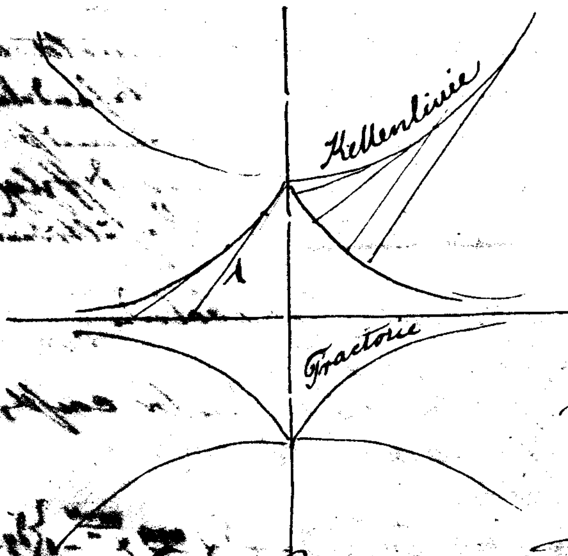
4. Es wird die Gl. der Curve verlangt, welche die Eigenschaft, daß alle ihre Tangenten dieselbe Länge λ haben. Dann ist $\lambda^2 = y^2\left(1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)$ woraus sogleich folgt.
$$x = \int\frac{dy}{y}\sqrt{\lambda^2-y^2} \qquad x = \sqrt{\lambda^2-y^2} + \lambda^2\int\frac{dy}{y\sqrt{\lambda^2-y^2}}$$
Setzt man $\lambda^2-y^2 = z^2$, so erhält man
$$\frac{dy}{y\sqrt{\lambda^2-y^2}} = -\frac{dz}{2\lambda}\left(\frac{1}{\lambda-z}+\frac{1}{\lambda+z}\right) \quad \text{u. integrirt}$$
$$x = \sqrt{\lambda^2-y^2} + \frac{\lambda}{2}lg\frac{\lambda-z}{\lambda+z} + Const. \quad \text{oder nach einiger Reduction}$$
$$x = \sqrt{\lambda^2-y^2} + \frac{\lambda}{2}lg\left\{\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-y^2}}{y}\right\}^2 + Const.$$
Oder endlich $y^\lambda . e^{x-\sqrt{\lambda^2-y^2}} = Const.\left\{\lambda-\sqrt{\lambda^2-y^2}\right\}^\lambda$

Diese Curve besteht aus 4 kongr. Ästen, vermöge ihrer Definition kann sie, als den Weg eines



fein [?] angesehen werden, welche auf seiner Ebene durch einen Faden gezogen wird, dessen Endpunkt [?] sich in einer geraden Linie sich fortbewegt. Aus diesem Grunde hat die Curve den Namen Tractorie od. Tractrix. (Zuglinie) erhalten. Sie kann als mechanische Curve betrachtet werden.

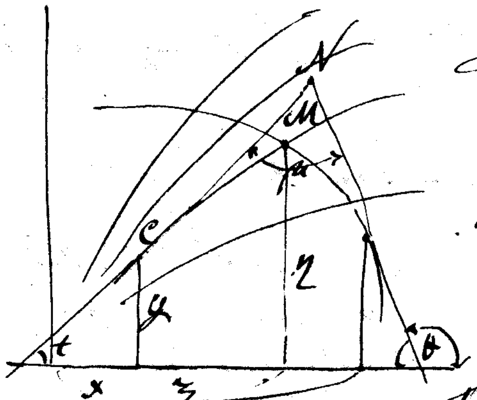
Diese Curve hat überdies noch die bemerkenswerthe Eigenschaft die Evolvente einer Kettenlinie zu sein.



Problem Trajektorie.

Wenn man in der Curve $f(x,a)$ dem Parameter a alle möglichen Werthe gibt u. für jeden derselben sich die Curve verzeichnet denkt, so erhält man eine Schaar von ähnlichen Curven, über welche man sich eine Frage stellen kann. Es wird gefragt, welches ist diejenige Curve, welche alle vorbeschriebenen [?] unter gleichem Winkel durchschneidet†. Diese Curve heisst die Trajektorie der gegebenen. Ihre Lösung führt wieder auf die Integration einer Differenzialgleichung ersten Ordn. u. 2ten Grades, welche man nun folgendermaßen erhält. Es sei C ein Pkt der gegebenen Curve deren Gl. $y = f(x,a)$, T sei ein Pkt der Trajectorie dessen Ordinaten ξ u. η. Man ziehe an beide Curven die Tgten. Ihre Neigungen seien t u. θ. Der Gemeinschaftl. Pkt der Curven sei M. Der Durchschnittspkt der Tangenten sei N der Winkel beider Tangenten sei μ

† oder bei welcher dieser ∠ eine gegeb. Fct von x ist.



so ist $tg\, t = f'(x,a)$, $tg\, \theta = \frac{d\eta}{d\xi}$

$\mu = \theta - t$ also $tg\, \mu = \frac{tg\,\theta - tg\,t}{1 + tg\,\theta\, tg\,t}$ oder $tg\, \mu = \frac{\frac{d\eta}{d\xi} - f'(x,a)}{1 + \frac{d\eta}{d\xi} f'(x,a)}$

Lässt man nun C u. T nach M fortrücken, so wird $\xi = x$ u. $\eta = y$ und es geht in den $\frac{M}{\Sigma}$ über. Dass der Winkel einer gegeb. fct. $w(x)$ sein soll, so dass man hat. die Differenzial Gl. $\{w(x) + f'(x,a)\}dx + \{w(x)\, f'(x,a) - 1\}dy$

sein bedeuten x u. y von jetzt an aber nicht mehr die Ordinaten der gegeben Curven, sondern der ~~Curve~~ Trajectorie. Wenn man nun daher von einem Punkt zum andern übergeht, so geht einer der gegebenen Curven in die nächst folgende über, und ändert sich der Parameter a daher ist also eine fct von x u. y und als solche zu behandeln auch in der gefundenen Differenzial Gl. Man muss also aus der gegebenen Gl. $y = f(x,a)$ und jener Diffgl. die Grösse a eliminiren und erst dann die Resultirende der Differenzialgl. integriren.

Zb. die gegebenen Curven seien Parabeln enthalten in der Gl. $y = f(x,a) = a x^{\frac{m}{n}}$

die Trajectorie soll diese Parabeln unter constantem Winkel schneiden. und es sei also $w(x) = \alpha$

Man hat nun zuerst zu bilden

$$f'(x,a) = \frac{ma}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}} \quad \text{und} \quad \left\{\alpha + \frac{ma}{n} x^{\frac{m-n}{n}}\right\} dx + \left\{\alpha \frac{ma}{n} x^{\frac{m-n}{n}} - 1\right\} dy$$

Zwischen dieser Gl. und der gegebenen $y = a x^{\frac{m}{n}}$ u. der gegebenen eliminiren man nun die Grösse a

$a = y x^{-\frac{m}{n}}$ so erfolgt.

$$\left\{\alpha + \frac{my}{nx}\right\} dx + \left\{\frac{\alpha m y}{nx} - 1\right\} dy = 0$$

diese Differenzialgl. lässt sich leicht integriren mit Hilfe einer homogenen fct. schreibt man sie nämlich in der Form

$$(n\alpha x + my)\,dx + (m\alpha y - nx)\,dy = 0$$

u. setzt $\frac{y}{x} = u$. so erfolgt nach II

$$l x + \int \frac{m\alpha u - n}{m\alpha u^2 + (m-n)u + n\alpha} \cdot du = \text{Const}.$$

Indem man nach der bekannten Formel die Integration ausführt u. dann u wieder fortschafft, so wird man nach einigen Reductionen die Trajectorien Gl. finden

$$l\left\{m\alpha y^2 + (m-n)\,xy + m\alpha x^2\right\} + \text{Const} = \frac{m+n}{\sqrt{mn\alpha^2 - (m-n)^2}} \cancel{\text{arctg}}$$

$$\text{arctg}\, \frac{2m\alpha y + (m-n)\,x}{2x\sqrt{mn\alpha^2 - (m-n)^2}}$$

Betrachtet man die gerade Linie und setzt also $m = n = 1$

$$b(x^2+y^2)+C = \frac{2}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$ welches die Gl. der logarithm. Spirale ist. Um dies deutlich zu sehen führen man Polarcoordinaten ein, so ist $x = r\cos v$ u. $y = r\sin v$ und man erhält

$$r = Ce^{\frac{v}{a}}$$

Um die gewöhnl. Parabel hätte man zu setzen.

$n = 1$:

Verlangt man im allgemeinen Fall, daß der Winkel ein Rechter sei, setzt $\omega(x) = \infty$ und die Differenzial Gl. ist aber $$dx + f'(x,a)\,dy = 0.$$

welche u. aus $y = f(x,a)$ a zu eliminiren ist für die gegebene Curve sei:

$$f(x,a) = y = ax \quad \text{also.}$$

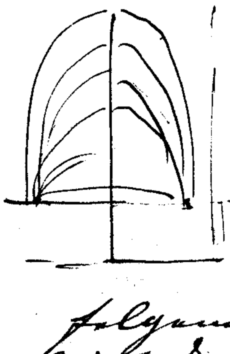
$f'(x,a) = a$ u. $dx + a\,dy = 0$ und da $a = \frac{y}{x}$ so erhält man die Diffglch.

$x\,dx + y\,dy = 0$ welche integrirt giebt: $x^2+y^2 = c^2$ den Kreis.

ferner für die Parabel.

$y = f(x,a) = ax^{\frac{m}{n}}$ hat man die Diffglch. $nx\,dx + my\,dy = 0$ u. die Integration $nx^2 + my^2 = C$ die Parabel. Und man sieht daß die Trajectorie miteinander ein Ellypse od. Hyperbel. Je nachdem n u. m entgegengesetzte oder einerlei Zeichen sind, je nachdem also von einer höheren Parabel oder höheren Hyperbel die Rede ist.

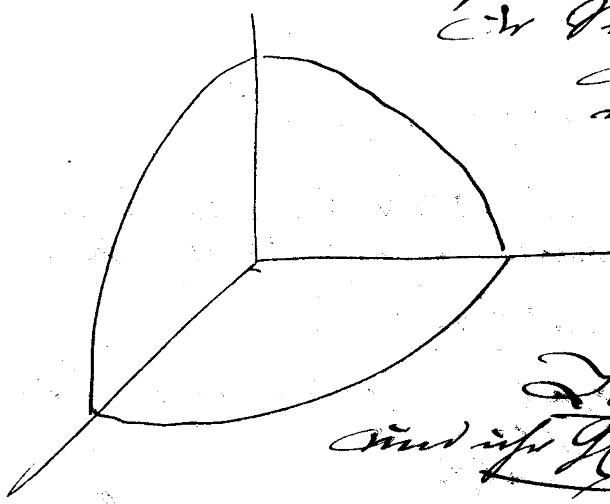
9. Den Trajectorien analog kann man nach Curven fragen, welche z.B. ein System von Curven, welche sämtlich auf einer krummen Oberfläche gezeichnet sind nach einem gewissen Gesetze durchschneiden. Ein Beispiel.



Denkt man sich durch einen festen Durchm. einer Kugel alle aufeinanderfolgenden Meridianebenen gelegt, so erhält man auf der Kugel ∞ viele Durchschnittscurven, welche Hauptkreise sind; Man kann sich nun die

Lage stellen, welche ist die Curve doppelter
Krümmung, welche diese sämtlichen Kreise unter
gleichem Winkel durchschneidet.

Diese Curve ist eine der Spirale ähnliche, welche
sich in unendlichen Windungen ~~der~~ einem Pole der
Kugel nähert. Auf Theile b dieser Curve
ist der Weg eines Schiffes auf
der See zusammengesetzt, wenn
der Seefahrer immer
unverändert eine ge-
wisse Richtung nach der
[illegible]
gegen [illegible]
Die Curve hat den
Namen



Logodromie [illegible]
und ihre [illegible]

$h = x$ u. $k = y$ und bezeichnet man mit $(f)_0$ den Werth der fct, wenn man darin x u. $y = 0$ setzt, ebenso $\left(\frac{df}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{df}{dy}\right)_0$, ... Die Werthe dieser Diff. quot. für die [illegible] substituirt, so erhält man

$$f(x,y) = (f)_0 + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \cdot x + \left(\frac{df}{dy}\right)_0 y + \frac{1}{1.2}\left(\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 x^2 + 2\left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)_0 xy + \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_0 y^2\right) + \dots$$

(Die Macl. Reihe für 2 Var.)

Elimination von Constanten und allgem. Functionen aus Gl.

Es ist oft wünschenswerth, gewisse allgem. const. Größen und willkürliche fct, welche in einer gegeb. Gl. vorkommen zu eliminiren, [illegible] durch Einführung v. Diff. quotient. geschehen kann. Die Elimination der Constanten ist hilfreich und führt zur Auflösung gewisser Gl. z. B. Man hat die Gl. $f(x,y,a) = 0$ und wünscht die Const. a zu eliminiren, so braucht man nur diese Gl. zu diff. nach x, erh. $\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$ [illegible] aus diesen beiden Gl. zu eliminiren, so wird man eine Gl. erh. in welcher außer x u. y auch noch $\frac{dy}{dx}$ vorkommt, also von der Form $f(x,y \dots \frac{dy}{dx}) = 0$ ist; hat man eine

1) Gl. $f(x,y,a,b,c \dots) = 0$ und ist n die Anzahl der (1

Constanten so diff. diese Gl. n mal, und eliminirt aus den erh. $n+1$ Gl. die Constanten, so wird man im allgem. eine Gl. von der Form erh.

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Wenn man nun umgekehrt aus dieser Gl. eine andere sucht, welche keine Diff. quot. mehr enthält d. h. also, wenn man diese Diff. Gl. integrirt, so wird die allg. Integralgleichung n willk. Constante enthalten müssen, und mit Gl. [illegible] [illegible]. Wenn man die Gl. m mal diff. und $m > n$ ist, so wird man aus den vorhandenen $m+1$ Gleichungen solche bilden können, welche von Const. frei sind: Die Anzahl ist = der Anzahl der Combin. ohne Wiederholungen zur m-ten Ordn. also Gl.

$$\frac{(m+1)\,m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)}$$, diese Gl. zusammen genommen entsprechen einer einzigen primitiven

ist $F(x, y, \ldots a, b, c) = 0$ u. heißen daher Simultan-Gleichungen [illegible] bestehend.

Ist $m = n$, so kann man aus den $n+1$ Gl. andere bilden, welche nur den n-ten Diff.quot. enthalten in welcher jedes mal nur eine Constant vorkommt. Die Anzahl dieser Gl. ist $= n$ und alle zusammen enthalten alle Constanten. Diese Diff.Gl. nennt man die ersten Integrale der Diff.Gl., welche n-ter Ordn. ist und keine Const. enthält. Ferner kann man $n-1$ Diff.Gl. bilden, welche je zwei der Constanten enthalten [illegible] man findet nur [illegible] der $n-2$ Ordn. ist u. welche die zweiten Integr. jener Gl. n-ter Ordn. genannt werden. Aus den ersten Integralen (deren Anzahl n) kann man den [illegible] Diff.quot. der 2. [illegible] der $n-1$ Ordn. eliminieren und erhält also eine Gl. welche alle n Const. u. keinen Diff.quot. mehr enthält. Sind also die ersten Integr. einer Diff.Gl. gegeben, so kann man daraus direkt [illegible] Eliminieren das allgemeine Integral bilden, welches durch die Gl. $F(x, y, \ldots abc) = 0$ dargestellt ist. Gleiches gilt von den zweiten dritten etc. $n-1$ Integralen.

Ist $m < n$, so kann man aus den $n+1$ Gl. andere bilden welche nur noch $n-m$ Const. enthalten, die Anzahl dieser Gl. ist = der Zahl der Combin. welche man aus n Elementen zur $m$ten Classe bilden kann also Gl.

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m}$$

Nimmt man von diesen Gl. irgend eine welche [illegible] und diff. sie noch $n-m$ mal, so erh. man $n-m+1$ Gl., welche noch $n-m$ Const. enthalten eliminiert man diese, so wird man auf eine Gl. kommen, welche keine Constante und die Diff.quot. der 1. 2. … n. Ordn. enthält. Offenbar muß diese genau mit der Diff.Gl. übereinstimmen welche sich ergibt, wenn man die Function n mal differ. u. die Const. eliminiert. Aus diesen

Bemerkung werden wir später Gebrauch machen.

Gemeinnützliche Beispiele über die Elimination der Constanten.

Es sei $y = ax$ $\frac{dy}{dx} = a$ folgt $y = x\frac{dy}{dx}$; $\frac{y}{dy} = \frac{x}{dy}$

Es sei $y = ax + a^2$, so ist $\frac{dy}{dx} = a$ also $y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

Es sei $y = a \sin kx + b \cos kx$ (1)

so ist $\frac{dy}{dx} = ak\cos kx - bk \sin kx$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -ak^2 \sin kx - bk^2 \cos kx$$

so ist $\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2y$, umgekehrt also ist das Integral dieser Diffgl. dargestellt durch die Gl. (1).

4) Man habe: $y - ae^{bx^2} = 0$

log. man diese Gl. so folgt

$ly = la + bx^2$ u. $\frac{dy}{dx} = +2bxy$ und daraus.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +2by + 2bx\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dx}\cdot\frac{y + x\frac{dy}{dx}}{xy} \quad \text{geordnet hat man}$$

$xy\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$ die Gl. $\frac{dy}{dx} - 2bxy = 0$

ist ein erstes ~~Diff.~~ u. dieser Diffgl.

So sind im vorigen Beispiel die beiden Gl.

$\frac{dy}{dx}\cdot\sin kx - ky\cdot\cos kx + bk = 0$

$\frac{dy}{dx}\cdot\cos k + ky \sin kx - ak = 0$ die zwei ersten Integrale

von $\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2y$. Eliminirt man aus Ihnen $\frac{dy}{dx}$ so erhält man eine einzige Gleichung mit den beiden willkürlichen Const. a u. b od. d. allg. Int. gewöhnlich mit der primitiven Gl. übereinstimmen wird. 5t. Beispiel. Fortgesetzt an.

1), $(x-a^2)+(y-b)^2 = r^2$ (Kreis Gr.). Man soll daraus a, b, u r (die Constanten) eliminiren.

Durch diff. erhält man $x - a + y - b\frac{dy}{dx} = 0$ (2

$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-b)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (3

$3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx} + (y-b)\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ (4

daraus erhält man die Gl. $\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\cdot\frac{dy}{dx} = 0$ (5

Man erhält aber auch noch die folg. Gl.

$$x-a = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$y-b = -\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad r = \pm\left\{\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right\} \qquad (6)$$

Die Gl. (5) (siehe oben) enthält die folg. 3 ersten Integrale, welche man aus den angeführten Gl. erhält: $(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0.$

$$(x-a)\frac{d^2y}{dx^2}-\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1\right\}\frac{dy}{dx}=0$$

$$r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right\}^3=0$$

Die zwei zweiten Integr. der Gl. No 5 sind

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{r^2}{(y-b)^2}+1=0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{r^2}{r^2-(x-a)^2}+1=0$$

Die Gl. (6) sind diejenigen, welche man zur Lösung der Krümmungs Aufgabe einer Curve erhält.

Nämlich sind a u. b ordinaten des Krümmungsmittelpunkts und r ist der Krümmungsradius. Der Grund dieser Bedeutung liegt darin daß, wenn man x u. y für die Coordinaten einer [illegible] Curve erklärt, der Kreis in diesem Punkt eine solche Lage hat daß der erste und zweite Diffq. der Curve und des Kreises übereinstimmen. Da nun der Kreis mit einer Curve keine genauere Berührung als einer zweiten Ordnung eingehen kann und daher osculirender Kreis heißt und da diese Berührung [illegible] stattfindet, so ist jene Bedeutung der Größen a, b, r gerechtfertigt.

Bemerkung. Wenn man den Constanten a b [illegible] des allgemeinen Integrals bestimmte Werthe beilegt, so erhält man particuläre Integr. der Diffgl., welche dieselbe immer noch auflösen werden. Man kann offenbar unendlich viele particuläre Integr. angeben. Oft wird durch Specialisirung der Const. d. allg. [illegible] verschw. [illegible]

Wir werden im Folgenden betrachten:

1. Differenziation entwickelter u. durch Gleichungen gegebener und unentwickelter Functionen mit zwei od. mehreren Veränderlichen.
2. Die Taylorsche Reihe für Functionen mit 2 Veränderlichen
3. Die Lösung des Max. u. Min. v. funct. mit 2 " "
4. Die Elimination v. Fctn. u. Constanten aus gegebenen Gleichungen durch Differenziation
5. Die wichtigsten allgem. Sätze über die Linien doppelter Krümmung u. kr. Oberflächen.

1.) ## 1.) Differenzation der funct. mit 2 Var:

Man kann die functionen $z = f(x,y)$ aus den doppelten Gesichtspunkt differenziren, je nachdem man x als Variable u. y als Const. od. umgekehrt y als Var. u. x als Const. ansieht. Man erhält dabei die Differenzialquot: wovon jeder die Stärke des Wachsthums der funct nur nach einer Richtung hin darstellt. Diese Differenzialquotienten werden darum partielle genannt. Ihre Definition ist enthalten in den Ausdrücken

$$\frac{f(x+\Delta x,y)}{\Delta x} \text{ für } \Delta x=0 \text{ werdend u. } \frac{f(x,y+\Delta y)}{\Delta y} \text{ für } \Delta y=0 \text{ werdend.}$$

Man bezeichnet diese partiellen Differentialquotienten häufig blos durch $\frac{df(xy)}{dx}$ u. $\frac{d(f(x,y))}{dy}$ oft auch wie Euler u. Laplace:

$\left(\frac{df(xy)}{dx}\right)$ $\left(\frac{df(x,y)}{dy}\right)$ oder $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ u. $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ u. nach Lagrange durch $f'(x)$, $f'(y)$ od. $z'(x)$, $z'(y)$ und wohl am zweckmäßigsten wie Jacobi mit $\frac{\partial z}{\partial x}$ u. $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Z. B. bei $z = l(ax+by)$ ist $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a}{ax+by}$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b}{ax+by}$. Die partiellen diff. quotienten 1. Ordg haben die wichtige Eigenschaft, daß wenn man sie einmal nach x u. dann u. zwar partiell nach y differenzirt, dasselbe Resultat erfolgt, als wenn man umgekehrt verfährt. Diese Eigenschaft besteht in der Gl. $\frac{d\frac{dz}{dx}}{dy} = \frac{d\frac{dz}{dy}}{dx}$. Der Nachweis des Satzes kann folgender sein:

da $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$, so ist $\frac{\Delta \frac{\Delta z}{\Delta x}}{\Delta y} =$

$$= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y)}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

Ebenso erhält man: $\frac{\Delta \frac{\Delta z}{\Delta y}}{\Delta x}$ = dem obigen

Geht man von den endlichen Werthen v. Δx u. Δy zu den Differenzialen dx u. dy über, so ergibt sich hieraus die Gl.

$$\frac{d\frac{dz}{dy}}{dx} = \frac{d\frac{dz}{dx}}{dy},$$

woraus folgt, daß die Ordnung in welcher man die beiden Differenziationen ausführt gleichgültig ist. Aus diesem Grunde kann man die Bezeichnung vereinfachen u. sich der bequemeren bedienen, also, wenn man nur durch die Aufeinanderfolge der Diff. dx u. dy die Ordg der Differen angezeigt, kann man die obige Gl schreiben:

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dy\,dx}$$

z. B.

1. Es sei $z = x^3 + 3ax^2y + y^3$, so ist $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 3x^2 + 6axy$
$\left(\frac{dz}{dy}\right) = 3ax^2 + 3y^2$ also $\frac{d^2z}{dx\,dy} = 6ax$ u. $\frac{d^2z}{dy\,dx} = 6ax$

2. Es sei $z = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{y}$ (Gl der Schraubenfläche)

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{u.} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{d^2z}{dx \cdot dy} = \frac{(x^2+y^2) - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{d^2z}{dy \cdot dx} = \frac{-(x^2+y^2) + x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Aus dem oben gefundenen Satz läßt sich durch Induction der ganz allgemeine aussprechen, daß wenn die Function $z = f(x, y, t \ldots)$ nach ihren Partial. Differenzirt werden soll, die Ordnung der aufeinander folgenden Differenziationen ebenfalls gleichgültig ist. Der Gang des Beweises besteht darin, daß man den Satz zuerst auf 3 Variable erst in der Weise ausdrückt, welcher man zeigt, daß der Satz $ba = ab$ ...

ist auch $abc = cab = bac$ u.s.f.

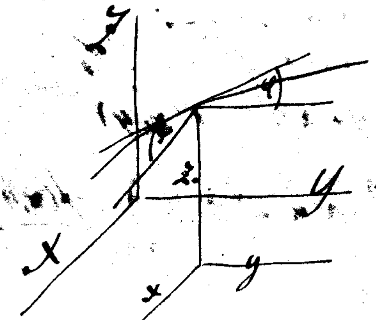
Würden von den Veränderlichen mehrere einander Nach, daß z im ganzen m mal nach x, n mal nach y differenzirt werden soll, so ist man also im Stande den verlangten Differenzialquotienten v. z also zu schreiben

$$\frac{d^{m+n+r\ldots}z}{dx^m, dy^n, dt^r\ldots}$$

Bsp. Es sei $z = \sqrt{y}\cdot\sin x + y e^{\arcsin x}$ und es sei verlangt $\frac{d^3 z}{dx^2 dy^2}$, so ist $\frac{d^2 z}{dy^2} = -\frac{\sin x}{4y^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sin x}{4y\sqrt{y}}$

und $\frac{d^3 z}{dx^2 dy^2} = +\frac{\cos x}{4y\sqrt{y}}$.

Die partiellen Differenzial-Coeff. 1. Ordnung einer Function von 2 Veränderlichen lassen sich als Ordinaten einer krummen Oberfläche betrachten (geom. dargestellt.)



Wenn man sich durch den Punkt x, y, z zu den Ebenen der XZ u. YZ Parallelschnitte geführt denkt, sodann Tangenten in diesem Punkt an die Schnittcurven zieht welche mit Ebene XY den Winkel φ u. ψ bildet, so ist $\left(\frac{dz}{dx}\right) = tg\,\varphi$; $\left(\frac{dz}{dy}\right) = tg\,\psi$ welche Eigenschaft bemerkt zu werden verdient.

Die Veränderung einer Function von mehreren Veränderlichen d.h. das Wachsthum derselben, wenn man alle Veränderlichen geändert denkt, läßt sich nicht etwa durch einen einzigen Diffcial-coefficient ausdrücken, kann überhaupt nur in der Form eines Differenzials dargestellt werden. Hier muß man also die Bedeutung des Differenzials ins Auge fassen. Wenn man eine Function einer Veränderl. differenziren muß, so kommt man mit den Diffquotienten fast immer aus, wo man aber solche integrirt, tritt das Differenzial in Anwendung u. es hat dasselbe hier best. Bedeutung. Das Differenzial einer Fct. $y = f(x)$ hat eine rein symbolische Bedeutung die selbst nur selbst, welche sich nicht vollständig aus seinem analytischen Ausdruck finden, erst durch hinzufügung einer Worterklärung erhellt. Diese Erklärung ist die, daß alle Gl. und Ausdrücke, worin Differenziale erscheinen erst dann streng richtig sind, wenn man die verschwindenden Differenzialen streng = 0 setzt. Dieß ergibt sich sehr leicht u. die Leibnitz'sche Bezeichnung beruht ganz darauf. In der Gl.

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$ sind $\frac{dy}{dx}$ streng = 0, daraus folgt

unmittelbar $dy = f'(x)\,dx$, da nämlich

$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + K\Delta x^2 + \ldots$ so folgt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + K\Delta x \ldots$ od. wenn man dx für Δx

setzt und damit bezeichnet daß dx am Schluße der Rechnung streng genommen $= 0$ werden soll

$\frac{dy}{dx} = f'(x) + K\,dx$, $dy = f'(x) + K\,dx^2$

Da nun das Glied $K\,dx^2$ immer vollständig aus der Rechnung verschwindet, wenn man schließlich $dx = 0$ setzt, so schreibt man dieses Glied nicht hin [illegible] folgt $dy = f'(x)\,dx$

Läßt man in einer Function von zwei Veränderlichen x u. y gleichzeitig wachsen, so ändert sie sich um $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ wofür man schreiben kann

$$\Delta z = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\cdot\Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\,\Delta y$$

Da nun nach der Taylor'sche Reihe

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x+\Delta x, y) + K'\Delta y + \ldots$ u.

$f(x,y) = f(x,y) + \Delta x K$, so hat man.

$$\Delta z = \frac{df(x,y)}{dx}\cdot\Delta x + \frac{df(x,y)}{dy}\cdot\Delta y + K\Delta x^2 + K_1\Delta x\Delta y + K_2\Delta^2 y$$

$$dz = \frac{df(x,y)}{dx}\cdot dx + \frac{df(x,y)}{dy}\cdot dy$$

oder kürzer: Da $f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x+\Delta x, y) +$

$+ \frac{df(x+\Delta x, y)}{dy}\Delta y + K_2\Delta y^2$

$= f(x,y) + \frac{df(x,y)}{dx}\cdot\Delta x + K\Delta x^2 +$

$+ \frac{df(x,y)}{dy}\Delta y + K_1\Delta x\Delta y$ oder.

$+ K_2\Delta y^2$

$$\Delta z = \left(\frac{df}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{df}{dy}\right)\Delta y + K\Delta x^2 + K_1\Delta x\Delta y + K_2\Delta y^2$$

Bezeichnet ~~man~~ Δx u. Δy [illegible]

= klein werden sollen mit dx u dy sodann Δz mit dz, so wird $dz = \left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy + k\,dx^2 + k_1\,dx\,dy + k_2\,dy^2$

Da nun, wenn man dx u dy am Ende der Rechnung $= 0$ setzt die Glieder, welche mit ihren Quadraten und Producten multiplicirt sind vollständig aus der Rechnung gehen, so bestimmen sie von vornherein weg u erhält also für das vollständige Differenzial dz nämlich für die Änderung von z, welche aus der Änderung der beiden Var. entspringt, die symbolische Formel

$$dz = \left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy$$

Analoge Betrachtungen sind bei allen Differenziationen anzunehmen

Man nimmt gehen dieselben aber v. jetzt an, daß sie leicht anzustellen sind.

Ist $f(x, y, z, \dots)$ eine Fct von mehreren Variabeln so läßt sich wie groß auch ihre Anzahl sei das vollst. Diff. dersel. auf ganz gleiche Weise wie oben ermitteln u man erhält wie vorauszusehen.

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy + \left(\frac{df}{dz}\right)dz + \dots$$

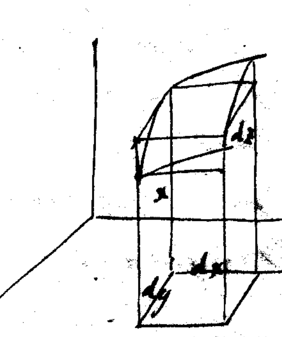
Beispiel. Man soll den Ausdruck $\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}$ differenziren. Es ist $\frac{df}{dx} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{df}{dy} = -\frac{x}{x^2+y^2}$

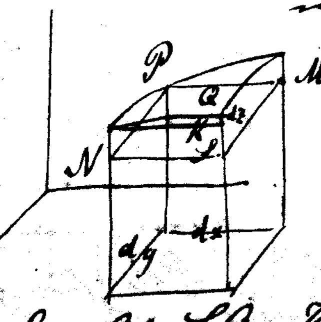
$$d\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

2. Beispiel. Man soll das Differenzial der Fct. $f = x \cdot y \cdot z$ finden. $\frac{df}{dx} = yz$, $\frac{df}{dy} = xz$, $\frac{df}{dz} = xy$

$$d\cdot xyz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Man kann sich das Differenzial der Fct. von 2 Var. auch geometrisch darstellen: Denn es ist $KL = \left(\frac{df}{dy}\right)dy$ und $KQ = \left(\frac{df(x,y+dy)}{dx}\right)dx$





u. $dz = LQ$ für $dy = 0$ werdend, wofür u unser Diff formel

nun gilt fällt also die Gl. $LQ = KL + KQ$

mit der obigen Diff. formel zusammen.
In der Figur ist das Rechteck LMNP ∥ zur xy Ebene. In der allgemeinen Formel

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy + \left(\frac{df}{dz}\right)dz + \dots$$

sind noch einige bes. Regeln für die Diff. der Functionen enthalten, nämlich:

1. Wenn die Veränderlichen x, y, z etc. insgesammt Functionen einer u. derselben Grösse t sind, also z.B. $x = \varphi(t)$, $y = \varphi_1(t)$ etc. so ist $dx = \left(\frac{dx}{dt}\right)dt$ u. $dy = \left(\frac{dy}{dt}\right)dt$ und man hat jetzt

$$df = \left\{\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{df}{dz}\right)\frac{dz}{dt} \dots\right\}dt$$

z.B. Es sei $f = x \cdot ly$ $\quad y = t + \sqrt{1+t^2}$, $x = arctg\, t$

so ist $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ $\quad \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{t+\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}$.

$df = ly\, dx + \frac{x}{y} \cdot dy$ und man hat

$$\frac{df}{dt} = \frac{l(1+\sqrt{1+t^2})}{1+t^2} + \frac{arctg\, t}{\sqrt{1+t^2}}$$

2. Kommt in der gegebenen Fct. ausser x, y, z u.s.f. auch noch die Veränderliche t von welcher diese Grössen abhängen u. nach welcher die Function diff. werd. soll selbst vor, so tritt zu der obigen Formel noch ein neues Glied hinzu, nämlich das Differenzial der Fct. genommen nach t in so fern t explicite in ihr vorkommt. Also wird man haben

$$df = \left(\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dt} + \dots + \left(\frac{df}{dt}\right)\right)dt$$

$f(x,y,t) = x \cdot y \cdot t$ u. dabei soll sein $x = lt$, $y = a^t$

so ist $df = \left(\frac{yt}{t} + xt \cdot a^t la + xy\right) dt$

3. Wenn die Fct $f(x,y,z \dots t)$ mit einer Gl. zwischen den Veränderlichen zusammenhängt, welche z.B. t als Fct der übrigen Veränderlichen ausdrückt, so dass man hat $t = \varphi(x,y,z \dots t)$, so lässt sich ein Diff. z.B. dt eliminiren, was häufig bequemer geschehen kann, wenn man die Elimination zwischen den beiden Gleichungen

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy + \dots + \left(\frac{df}{dt}\right)dt \text{ u.}$$

wie $dt = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) dy + \ldots$

ausführt, bequemer geschehen kann, als wenn man t zuvor eliminirt.

Aus unserer allg. Diff. formel einer fct von mehreren Veränderlichen ergeben sich zugleich in großer Allgemeinheit die bekannten Sätze über die Differenziation eines Products etc.

So erhält man zb. aus Nr. 1. Wenn man speciell $f(x.y.z\ldots)$ setzt u. jede der Veränderl. für eine fct v. t erklärt, so ist

$$\frac{d(x.y.z\ldots)}{dt} = yz\ldots\frac{dx}{dt} + xz\ldots\frac{dy}{dt} + \ldots xy\ldots\frac{dz}{dt} + \ldots$$

Ist $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ so ist $\frac{df}{dx} = \frac{1}{y}$ $\quad \frac{df}{dy} = -\frac{x}{y^2}$

$$\frac{d\cdot\frac{x}{y}}{dt} = \frac{1}{y}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{x}{y^2}\,\frac{dy}{dt} = \frac{y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}}{y^2}$$

4. Wenn die funct. $f(x)$, worin x eine fct v. y, y eine fct v. z, u. s. f. schließl. eine fct v. t, nach t Diff. wird, soll bewiesen werden

$$df(x) = \left(\frac{df}{dx}\right) dx \;, \quad dx = \left(\frac{dx}{dy}\right) dy\,; \; dy = \left(\frac{dy}{dz}\right) dz \;\ldots$$

folgl. $df(x) = \left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)\ldots\left(\frac{du}{dt}\right)dt$ od. wenn man

$x = f_1(y)$ $\quad y = f_2(z)$ u. $u = f_n(t)$ gesetzt wird, so hat man.

$$df(x) = \left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{df_1(y)}{dy}\right)\left(\frac{df_2(z)}{dz}\right)\ldots\left(\frac{df_n(t)}{dt}\right).dt$$

Zb. Man habe $f(x) = \frac{(1+x)}{(1-x)}$ wenn

$x^5 + x^2 = y^3$ u. $y = lt$ Nun ist:

$$f(x) = \frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2}.dx = \frac{2}{(1-x)^2}.dx$$

$dx(5x^4+2x) = 3y^2\,dy \quad dx = \frac{3y^2}{5x^4+2x}.dy.$ und

$\frac{dy}{} = \frac{dt}{t}$ und $\frac{df}{dt} = \frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{3y^2}{5x^4+2x}\cdot\frac{1}{t}$;

Theorem homogener fctionen.

Unter einer hom. fct. des n. Grades versteht man diejenige ganze Ausdr. welche, wenn man in diesem überall ρx für x, ρy für y an die Stelle v. x y u. ss. setzen

mit Ausnahme des fact. ϱ^n unverändert bleiben
Ihre Definitionsgleichung ist also.

$$f(\varrho x, \varrho y, \varrho z \dots) = \varrho^n f(x, y, z \dots)$$

Die Function f ist dann eine homogene fct. vom n^{ten} Grade. Ist sie vom 0^{ten} Grad, so hat man

$$f(\varrho x, \varrho y, \varrho z, \dots) = f(x, y, z \dots).$$

Z. B. Der Ausdruck $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ ist eine homogene fct vom -2^{ten} Grad.

Der Ausdruck $ax^2+2bxy+cy^2$ ist eine homog. vom 2^{ten} Grad.

Der Ausdruck $\sqrt[n]{\frac{xyz}{xy+xz+yz}}$ ist von der Ordg. $\frac{1}{n}$

Auch transcendente Ausdrücke lassen sich zu den homogenen zählen, wenn die Ausdrücke von welchen die transcendente fct. abhängt homogen u. von der 0^{ten} Ordnung sind.

Z.B. $l\frac{x}{y} \left(= \varrho^0 l\frac{x}{y}\right)$, $\arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$, $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ etc. Dagegen sind z.B. fctnen $\frac{x+y}{\sin(x+y)}$ keine homogenen Functionen.

Euler hat in einer Abhandlg v. 1754 gezeigt, daß diese homogenen Functionen eine sehr bemerkenswerthe Differenzialgleichung entsprechen welche, wie folgt, abgeleitet werden kann.

Setzt man nun letzt in der Definitionsgl.

$f(\varrho x, \varrho y, \varrho z \dots) = \varrho^n f(x, y, z)$ unter der Annahme daß die fct nur 2 Veränderliche enthalte, die willkürliche Größe $\varrho = 1+\varepsilon$, so erhält man.

A, $f(x+\varepsilon x, y+\varepsilon y, \dots) = (1+\varepsilon)^n f(x, y, z \dots)$ oder wenn man sich unter ε eine kleine Größe denkt und $\varepsilon x = \Delta x$ und $\varepsilon y = \Delta y$ setzt und sich erinnert, daß nach einer früheren Gleichung $f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \left(\frac{df}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{df}{dy}\right)\Delta y + K\Delta x^2 + K_1 \Delta y \Delta x + K_2 \Delta y^2$

B.) folgt $f(x+\varepsilon x, y+\varepsilon y) = f(x,y) + \left\{\left(\frac{df}{dx}\right)x + \left(\frac{df}{dy}\right)y\right\}\varepsilon + (Kx^2 + K_1 xy + K_2 y^2)\varepsilon^2$

folgt wenn man die Reihe entwickelt:

$$(1+\varepsilon)^n f(x,y) = f(x,y) + \left(\left(\frac{df}{dx}\right)x + \left(\frac{df}{dy}\right)y\right)\varepsilon + (k x^2 + k_1 xy + k_{11} y^2)\varepsilon^2$$

Da nun ε unabhängig von x u. y ist so müssen also wenn man die Gl. nach Potenzen v. ε ordnet die Coefficienten der gleichen Potenzen einander gleich sein woraus sich eine Reihe von Gleichungen entspringt, woraus uns jetzt nur die folgende interessirt, nämlich:

$$n\varepsilon f(x,y) = \left(\left(\frac{df}{dx}\right)x + \left(\frac{df}{dy}\right)y\right)\varepsilon \quad \text{oder}$$

$$n f(x,y) = \left(\frac{df}{dx}\right)x + \left(\frac{df}{dy}\right)y;$$

Auf ganz gleiche Weise findet man, wenn $f(x,y,z\dots)$ eine homogene Fct bezeichnet v. n^{ter} Ordg

$$n f(x,y,z\dots) = \left(\frac{df}{dx}\right)x + \left(\frac{df}{dy}\right)y + \left(\frac{df}{dz}\right)z + \dots$$

Zum Beispiel. Man habe:

$ax^2+2bxy+cy^2$, so ist $\frac{df}{dy} = 2(bx+cy)$, $\frac{df}{dx} = 2(ax+by)$

also:

$$2(ax^2+2bxy+cy^2) = 2(ax^2+2bxy) + 2(bxy+cy^2)$$, also identisch.

Man habe: $l\frac{x}{y}$, so ist $\frac{df}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{df}{dy} = -\frac{1}{y}$

und $n=0$ also $0 = 1-1$

Ebenso kann man die Gl. $\operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{z^2}\right)$ diff.

Eine homogene Fct 0^{ter} Ordg hat also immer die Differentialgleichung $\left(\frac{df}{dx}\right)x + \left(\frac{df}{dy}\right)y + \frac{df}{dz}z + \dots = 0$

Aehnliche Gl. finden sich, wenn man die Coefficienten k näher bestimmt, wozu die Taylor'sche Reihe dient, wenn man sie auf Fct. von mehreren Veränderlichen ausdehnt.

Differenziation der implicite gegebenen Functionen.

Wenn die Fct. u nicht unmittelbar durch die Veränderlichen ausgedrückt, sondern mit diesen verbunden ist und erst durch Auflösung einer Gl. ~~f(u,x,y~~ $z-a) = 0$ erhalten werden kann

So kann man ihre Diff. Gl. finden, wenn man auf der rechten Seite statt 0 sich eine Größe v gesetzt denkt und diese von den Größen $x, y, z \dots u$ abhängig vorstellt, aber so, daß sie sich mit ihnen nicht ändert, daß also $f(x+\Delta x, y+\Delta y, \dots u+\Delta u) = \Delta v = 0$ ist.

Man hat alsdann nach den vorigen Regeln für die Diff. verfahren sofort die gesuchte Diff. Gl.:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy + \left(\frac{df}{dz}\right)dz + \dots \left(\frac{df}{du}\right)du = 0$$

Z. B. Es sei gegeben

$$z^5 + x + y + z = 0\quad, \text{ so ist}$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = 1;\ \left(\frac{df}{dy}\right) = 1,\ \frac{df}{dz} = 5z^4 + 1$$

Demnach $dx + dy + (5z^4+1)dz = 0$

Es sei ferner gegeben $x\,lz + \frac{y}{z} + 1 = 0$

$$lz \cdot dx + \frac{1}{z}\cdot dy + \left(\frac{x}{z} - \frac{y}{z^2}\right)dz = 0$$

Enthält die Gl. nur 2 Var. x u. y, hat man also $f(x,y) = 0$, so ist die entsprechende Diff. Gl. $\left(\frac{df}{dx}\right)dx - \left(\frac{df}{dy}\right)dy = 0$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dy}\right)}.$$

Zum Beispiel Man habe:

$$x^y - y^x = 0\ ;\ \text{so ist}$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = y\,x^{y-1} - y^x\,ly$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right) = x^y\,lx - x\,y^{x-1}$$

Oder kürzer, wenn man $x^y = y^x$ schreibt, u. logarithmirt

$$y\,lx - x\,ly = 0$$

$$\left(\frac{y}{x} - ly\right)dx + \left(lx - \frac{x}{y}\right)dy = 0\text{, woraus}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\,ly - y}{y\,lx - x}\cdot\frac{y}{x}.$$

Ist ein Werth der Var. dieser Diff. quotient gefunden worden z. B. für $x = 2$ wozu der Werth $y = 4$ gehört, so ist.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2l4-4}{4l2-2}\cdot\frac{4}{2} = \frac{2l4-4}{2l2-1} = \frac{4l2-4}{2l2-1}$$

$$\sqrt[m]{ax^2+2bxy+cy^2} - \sqrt[n]{\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2} = 0.$$

Logarithm. man diese Gl. so hat man

$$\frac{1}{m}\, l(ax^2+2bxy+cy^2 - \frac{1}{n}\, l(\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2) = 0$$

$$\frac{1}{m}\left(\frac{ax+by}{ax^2+2bxy+cy^2} - \frac{1}{n}\,\frac{\alpha x+\beta y}{\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2}\right) dx$$

$$+\frac{1}{m}\left(\frac{bx+cy}{ax^2+\cdots+cy^2} - \frac{1}{n}\cdot\frac{\beta x+\gamma y}{\alpha x^2+\cdots+\gamma y^2}\right) dy = 0$$

Wenn in der Gl. 3 Veränderliche vorkommen so lassen sich durch die partiellen Diff. quot. der fct. $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, finden.

Aus der Gl. $f(x,y,z) = 0$ folgt nämlich:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy + \left(\frac{df}{dz}\right)dz = 0$$

Denkt man sich nun z als fct. v. x u. y aus der gegeb. Gl. entwickelt, und dann sein vollst. Differential ermittelt, so wird es dem früheren gemäß die Form haben $dz = p\,dx + q\,dy$ wobei p u. q die gesuchten Differentialquot. bez. Eliminirt man nun das Diff. dz u. ordnet die Resultirende Gl. nach dx u. dy so erfolgt: $\left(\left(\frac{df}{dx}\right) + p\left(\frac{df}{dz}\right)\right)dx + \left(\left(\frac{df}{dy}\right) + q\left(\frac{df}{dz}\right)\right)dy = 0$

In dieser Gl. sind dx u. dy ganz willkürl. und ganz von einander unabhängig. Daher müssen die Coefficienten derselben jeder für sich = 0 sein, woraus man erhält

$$p = \left(\frac{dx}{dz}\right) = -\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dz}\right)}\ ;\quad q = \left(\frac{dy}{dz}\right) = -\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\left(\frac{df}{dz}\right)}$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die partiellen Diff. quot. der fct. u finden welche der Gl. $f(x,y,z,u) = 0$ genügt.

Entwicklg der Differentiale höh: Ordg von fct. Function mit mehreren Veränderlichen.

Ist f eine fct. v. 2 Veränderlichen so ist bekanntl. das vollständige Differential 1ᵗ Ordg

1) $df = \left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy$ läßt man darin x u. y abermals, dx u. dy sich ändern und sucht man die entsprechende Änderung von df, so wird man finden, daß die Änderungen dx u. dy nicht mehr in der 1ᵗ sondern 2ᵗ Dimension ... wenn man alle Glieder berücksichtigt ... in der 1ᵗ u. 2ᵗ vorkommen. Diese höh. Potenzen außer der 2ᵗ lassen wir wieder weg, ... dy Größen sind welche am Ende der Reihe hinzugesetzt werden u. als ... alle Glieder höh. Dimension als der zweiten aus der Reihe verschwinden. Man hat nun auf jedes einzelne Glied v. df die Gl. (1) anzuwenden und erhält dann das Diff. d^2f

$$d^2f = \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)dx}{dx}dx + \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)dx}{dy} + \frac{d\left(\frac{df}{dy}\right)dy}{dx}$$

Oder, wenn man den ferneren $\frac{d\left(\frac{df}{dy}\right)dy}{dy}\cdot dy$ dazu addiert, wonach es gleichgültig ist, ~~...~~ ob man eine fct. zuerst nach y u. dann nach x od. umgekehrt diff.

2). $d^2f = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)dx^2 + 2\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)dx\,dy + \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)dy^2$

Wendet man dasselbe Verf. auf diese Gl. nochmals an, so ergibt sich

$$d^3f = \left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)dx^3 + 3\left(\frac{d^3f}{dx^2dy}\right)dx^2dy + \left(\frac{d^3f}{dx\,dy^2}\right)dx\,dy^2 + \left(\frac{d^3f}{dy^3}\right)dy^3$$

Fährt man auf diese Weise fort, so wird man sich überzeugen, daß die Coefficienten mit jenen des Binoms übereinstimmen und daß man daher allgem. für das vollst. Diff. nᵗ Ordg. haben wird:

$$d^nf = \left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)dx^n + n\,\frac{d^nf}{dx^{n-1}dy}\cdot dx^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{d^nf}{dx^{n-2}dy^2}\right)dx^{n-2}dy^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d^nf}{dx^{n-3}dy^3}\right)dx^{n-3}dy^3 + \ldots$$

$$+ \dots n\left(\frac{d^n f}{dx\,dy^{n-1}}\right)dx\,dy^{n-1} + \left(\frac{d^n f}{dy^n}\right)dy^n$$

Man stellt diese Formel symbolisch dar, wie folgt.

$$d^n f = \left(\frac{1}{dx}\cdot dx + \frac{1}{dy}\cdot dy\right)^n \cdot d^n f$$

welche die oben gefundene wiedergibt, wenn man nachgeschrieben hat, den Exponent an die Stelle von 1 im Zähler des Zeichens $d^n f$ setzt.

Wenn man unter f eine Fct. v. 3 Veränderl. $x.y.z$ versteht u. nehme die auf einander folg. Diff. derselben mit Hülfe der bekannten Formel

$$df = \frac{df}{dx}\cdot dx + \frac{df}{dy}\cdot dy + \frac{df}{dz}\cdot dz$$

so ergibt sich wieder ein allg. Gesetz, und die Coeff. (Zweiten) Potenzen befolgen das Gesetz der n Potenz eines Trinoms. Symbolisch läßt diese Regel dann für das n Diff. einfach wie folgt darst.

$$d^n f = \left(\frac{1}{dx}\cdot dx + \frac{1}{dy}\cdot dy + \frac{1}{dz}\cdot dz \dots\right)^n d^n f$$

Ueberhaupt findet man, wenn f eine Fct von irgend einer Anzahl Veränderl. ist, ist die symbol. Formel $d^n f = \left(\frac{1}{dx}\cdot dx + \dots\dots\right)^n d^n f$.

Man habe z.B. $f = x.y$, so ist

$$df = y\cdot dx + x\,dy \qquad d^2 f = 2\,dx\,dy$$

Es sei ferner $f = xyz$

$$df = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

$$d^2 f = \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)dx^2 + 2\left(\frac{d^2 f}{dy\,dx}\right)dx\,y + \left(\frac{d^2 f}{dx\,dz}\right)dx\,dz + \left(\frac{d^2 f}{dy\,dz}\right)dy\,dz + \left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right)dy^2$$

$$= 2z\,dx\,dy + 2y\,dx\,dz + 2x\,dy\,dz \qquad d^3 f = 6\,dx\cdot dy\cdot dz$$

$$d^2(x^2+y^2+z^2) = 2(dx^2+dy^2+dz^2)$$

$d^3(x^3+y^3+z^3) = 6(dx^3+dy^3+dz^3)$

In der formel n kann $y = \pi x$ auch gesetzt werden. Man erhält ~~...~~ noch für nur noch von x abhängige den Diff. quot. $\frac{d^n f}{dx^n}$, wenn man $dy = \pi'(x)\,dx$ setzt.

In der formel n sind noch einige bes. bemerkens. fälle enthalten. Es sei nämlich $f = \varphi(x)\psi(y)$ das Product zweier functionen, wovon die eine nur v. x die andere nur v. y abhängt, alsdann ist

$$\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = \varphi^{(n)}(x)\,\psi(y)\;;\quad \left(\frac{d^n f}{dx^{n-1}dy}\right) = \varphi^{(n-1)}(x)\,\psi'(y)$$

$$\left(\frac{d^n f}{dx^{n-2}dy^2}\right) = \varphi^{(n-2)}(x)\cdot\psi^{(2)}(y) \text{ etc.}$$

Und man erhält die formel

$$d^n\{\varphi(x)\cdot\psi(y)\} = \varphi^{(n)}(x)\,\psi(y)\,dx^n + n\,\varphi^{(n-1)}_x\,\psi'(y)\,dx^{n-1}dy$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\varphi^{(n-2)}_x\cdot\psi^{(2)}(y)\cdot dx^{n-2}dy^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\varphi^{(2)}(x)\,\psi(y)^{(n-2)}\,dx^2\,dy^{n-2} +$$
$$+ n\,\varphi'(x)\,\psi(y)^{(n-1)}\cdot dx\,dy^{n-1}$$
$$+ \varphi(x)\,\psi^{(n)}(y)\,dy^n$$

$(n=3)$

Es sei $f = x^4y^2$

$d^3 f = ^2$

$\varphi^{(3)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot x \qquad \psi^{(3)}_y = 0$

$\varphi^2(x) = 4\cdot 3\cdot x^2 \qquad \psi^{(2)}y = 2\cdot 1$

$\varphi'(x) = 4x^3 \qquad \psi'(y) = 2\cdot y$

folglich ist $d^3x^4y^2 = 4\cdot 3\cdot 2x\cdot y^2dx^3 + 4\cdot 3\cdot 3\cdot x^2\cdot 2y\,dx^2dy$
$+ 4\cdot 3\cdot x^3\cdot 2\cdot 1\cdot dx\cdot dy^2 = 24xy^2dx^3 + 72x^2\cdot 2y\,dx^2dy$
$+ 24\cdot x^3dx\,dy^2$

Ist in der obigen formel $y = x$, so erhält man eine allgem. formel für den Diff. quotient n. Ordnung des Products zweier functionen v. x nämlich

$$\frac{d^n\{\varphi(x)\psi(x)\}}{dx^n} = \varphi(x)^n\,\psi(x) + n\,\varphi^{(n-1)}_{(x)}\,\psi'(x) +$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\varphi^{(n-2)}(x)\cdot\psi^{(2)}(x) + \dots + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\varphi^{(2)}_x\cdot\psi^{(n-2)}_x$$

$$\ldots + n\cdot\varphi'(x)\cdot\psi^{(n-1)}(x) + \varphi x\, \psi^{(n)}(x)$$

Es sei $\varphi(x) = e^{ax}$, $\psi(x) = \frac{1}{x}$

~~$\frac{e^{ax}}{x}$~~, so ist $\varphi^{n}(x) = a e^{ax}$. $\psi'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$\psi''(x) = +\frac{1.2}{x^3}$$

$$\psi'''(x) = -\frac{1.2.3}{x^4}$$

$$\vdots$$

(je nachdem n gerade od. ungerade ist). $\psi^{(n)}(x) = \pm\frac{1.2\cdots n}{x^{n+1}}$

$$\frac{d^n\left(\frac{e^{ax}}{x}\right)}{dx^n} = \frac{a^n e^{ax}}{x}\left\{1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2x^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3} + \cdots \pm \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1}{a^n x^n}\right\}$$

Auf ähnliche Art findet man $\frac{d^n(e^{ax}\sin x)}{dx^n}$. Eine allgemeinere Aufgabe als die bisher betrachteten ist die folgende:

Es ist f eine Fct. v. u u. v und durch diese Größen unmittelbar ausgedrückt gegeben. u u. v sind aber nicht unabhängige Variable, sondern jede vermöge gegeb. Gl. eine Fct. v. x u. y, welche letztere die unabhängigen Variabeln sind. Man verlangt die successiven Diff. v. f. Denkt man sich u u. v eliminiert, so wird f als Fct. v. x u. y erscheinen u. man wird haben $df = \left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy$. Nun ist aber $\left(\frac{df}{dx}\right) = \left(\frac{df}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)$ und $\frac{df}{dy} = \left(\frac{df}{du}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)$ wobei wiederum [illegible] dargestellt. Man erhält also dann

$$df = \left(\frac{df}{du}\right)\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy\right\} + \left(\frac{df}{dv}\right)\left(\left(\frac{dv}{dx}\right)dx + \left(\frac{dv}{dy}\right)dy\right)$$

Die Größen in der Klammer sind aber die vollst. Diff. v. u u. v genommen nach y; bezeichnet man diese mit du u. dv

$$df = \left(\frac{df}{du}\right)du + \left(\frac{df}{dv}\right)dv,$$

woraus hervorgeht, daß man die Funktion nach den gewöhnlichen Regeln u. unter der Annahme es seien u u. v die unabhängige Diff. darf. Um d^2f zu erhalten, kann man diese Gl. wiederholt anwenden, muß aber berücksichtigen, daß du und dv abhängig v. x u. y bei dermaligen Annahme jener Größen nicht constant bleiben sondern sich ebenfalls ändern. Man erhält also

$$d^2f = \left(\frac{d^2f}{du^2}\right)du^2 + \left(\frac{d^2f}{du\,dv}\right)du\,dv + \left(\frac{df}{du}\right)d^2u$$
$$+ \left(\frac{d^2f}{du\,dv}\right)du\,dv + \left(\frac{d^2f}{dv^2}\right)dv^2 + \left(\frac{df}{dv}\right)d^2v$$

oder also

$$d^2f = \left(\frac{d^2f}{du^2}\right)du^2 + 2\left(\frac{d^2f}{du\,dv}\right)du\,dv + \left(\frac{d^2f}{dv^2}\right)dv^2$$
$$+ \left(\frac{df}{du}\right)d^2u + \left(\frac{df}{dv}\right)d^2v$$

Auf ähnliche Weise erhält man:

$$d^3f = \left(\frac{d^3f}{du^3}\right)du^3 + 3\left(\frac{d^3f}{du^2dv}\right)du^2dv + 3\left(\frac{d^3f}{du\,dv^2}\right)du\,dv^2 + \left(\frac{d^3f}{dv^3}\right)dv^3$$
$$+ 3\left(\frac{d^2f}{du\,dv}\right)d^2u\,dv + 3\left(\frac{d^2f}{du\,dv}\right)du\,d^2v$$
$$+ 3\left(\frac{d^2f}{du^2}\right)d^2u\,du + 3\left(\frac{d^2f}{dv^2}\right)d^2v\,dv + \left(\frac{df}{du}\right)d^3u + \left(\frac{df}{dv}\right)d^3v$$

Auf gleiche Weise muß man verfahren, wenn die fct. von mehr Größen abhängt, welche fct. einer bel. Anz. Var. x, y, z sind und wenn die fct. nach den Ausdr. vorh. sind, welche x, y, z explicite enthalten. Es sei $f = ue^v$ und $u^2 + v^2 = (x+y)^2$, $u^3 + v^3 = (x+y)^3$

Da nun $\left(\frac{df}{du}\right) = e^v$, $\left(\frac{df}{dv}\right) = ue^v$

$\left(\frac{d^2f}{du^2}\right) = 0$, $\left(\frac{d^2f}{dv^2}\right) = ue^v$, $\frac{d^2f}{du\,dv} = e^v$, folglich ist

so $df = e^v(du + u\,dv)$, und $d^2f = e^v(u\,dv^2 + 2\,du\,dv + d^2u + u\,d^2v)$

Diff. man die beiden Gleichungen n. x u. y, so ergibt sich: $u\,du + v\,dv = (x+y)(dx+dy)$

$u^2 du + v^2 dv = (x+y)^2 (dx+dy)$, u. nochmals diff.

$$du^2 + u\,d^2u + dv^2 + v\,d^2v = (dx+dy)^2$$

$$2u\,du^2 + u^2 d^2u + 2v\,dv^2 + v^2 d^2v = 2(x+y)(dx+dy)^2$$

Aus diesen Gl. sind die Diff. du, dv, d^2u, d^2v zu bestimmen u. deren Werthe für df u. d^2f einzusetzen.

2) Beispiel erst.

$$f = x\,\varphi(u,v) \text{ und } u = \frac{x}{y},\ v = \frac{y}{z}$$

$df = \varphi\,dx + x\left(\frac{d\varphi}{du}\right)du + x\left(\frac{d\varphi}{dv}\right)dv$, wobei $du = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$, $dv = \frac{z\,dy - y\,dz}{z^2}$ erfolgt.

$$df = \left\{\varphi + \frac{x}{y}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)\right\}dx + \left\{\frac{x}{z}\left(\frac{d\varphi}{dv}\right) - \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)\right\}dy - \frac{xy}{z^2}\left(\frac{d\varphi}{dv}\right)dz$$

Wiederholte Differenziation unentwickelter Functionen.

§ 6. Ist nun durch die Gl. $f(x,y,z\ldots u) = 0$ gegebene function v. x, y, z usf., so ist nach dem Vorhergehenden.

$$\left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy + \left(\frac{df}{dz}\right)dz + \ldots + \frac{df}{du}du = 0$$

Wenn man diese Gl. wiederholt diff., so erhält man hierbei genau dieselben Ausdr. wie früher für entwickelte functionen und man wird wieder die symbolische Formel erhalten $\left(\frac{1}{dx}dx + \frac{1}{dy}dy + \frac{1}{dz}dz + \ldots \frac{1}{du}du\right)^n d^n f = 0$

Man habe z.B. die funct. $(x,y) = 0$, $f(x,y) = 0$

so erhält man zunächst $\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = 0$.

die höh. diff. erhält man, wenn man diese Gl. wiederh. differenz. und $\frac{dy}{dx} = y'$ als funct. v. x betrachtet. Man erhält alsdann

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)y' + \frac{d^2f}{dy^2}y'^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)y'' = 0$$

wobei $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ist, usf. $\frac{d^3f}{dx^3} + 3\frac{d^3f}{dx^2dy}y' + 3\frac{d^3f}{dx\,dy^2}y'^2$

$$+ \frac{d^3f}{dy^3}y'^3 + 3\frac{d^2f}{dx\,dy}y'' + 3\frac{d^2f}{dy^2}y'y'' + \frac{df}{dy}y''' = 0$$

Daraus kann man durch Aufl. linearer Gl. die Größen y', y'', y''' als Fct. v. x u. y darstellen.

Zb. Man soll die Gl. $\sqrt{x^2+y^2} + a \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = 0$ differenziren, so erhält man:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{ay}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{ax}{y^2+x^2}\right)dy = 0$$

woraus $\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{x(x^2+y^2)+ay\sqrt{x^2+y^2}}{y(x^2+y^2)-ax\sqrt{x^2+y^2}}$

$= -\frac{x\sqrt{x^2+y^2}+ay}{y\sqrt{x^2+y^2}-ax}$. Die Aufgabe erweitern allgemeinere Form an, wenn man sich denkt es seien zwischen den Größen deren Anzahl $= n+1$ sei n Gl. gegeben, nämlich

$\varphi_1(x,y,\dots t)=0, \quad \varphi_2(x,y,\dots t)=0$
$\vdots \qquad \varphi_n(x,y\dots t)=0.$

Diff. diese Gln. nach der bisherigen Regeln, so kann man die Diff.quotienten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ durch Auflösung linearer Gl. finden. Ebenso kann man durch nochmalige Differenziation $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ u.s.f. finden.

Zb. Man habe $\varphi_1(x,y,z)=0$, u. $\varphi_2(x,y,z)=0$, so erhält man, wenn man x als die ursprüngl. Veränderliche betrachtet

$$\frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d\varphi_1}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi_1}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{d\varphi_2}{dx} + \frac{d\varphi_2}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi_2}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0$$

woraus man findet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\varphi_1}{dx}\cdot\frac{d\varphi_2}{dz} - \frac{d\varphi_1}{dz}\cdot\frac{d\varphi_2}{dx}}{\frac{d\varphi_1}{dy}\cdot\frac{d\varphi_2}{dz} - \frac{d\varphi_1}{dz}\cdot\frac{d\varphi_2}{dy}}\,; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{d\varphi_1}{dy}\cdot\frac{d\varphi_2}{dx} - \frac{d\varphi_1}{dx}\cdot\frac{d\varphi_2}{dy}}{\frac{d\varphi_1}{dy}\cdot\frac{d\varphi_2}{dz} - \frac{d\varphi_1}{dz}\cdot\frac{d\varphi_2}{dy}}$$

u.s.f.

Ist nun eine Gl. zwischen 3 Variabeln gegeben $f(x,y,z)=0$ und verlangt man die höheren Diff. v. z, so ergeben sich diese in folgender Weise:

$\left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy + \left(\frac{df}{dz}\right)dz = 0$ woraus man dz findet.

Um d^2z zu erhalten, diff. die Gl. nochmals ...

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)dx^2 + \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)dy^2 + \left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)dz^2 + 2\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\cdot dx\,dy + \frac{d^2f}{dx\,dz}\cdot dx\cdot dz + \frac{d^2f}{dy.dz}\cdot dy.dz\right) + \frac{df}{dz}\cdot d^2z = 0$$

Daraus kann man d^2z ausgedr. durch dx u. dy finden u. erhält einen Ausdr. v. d. Form

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2$$

Schließlich wollen wir bemerken, daß man eine gegebene Gl. zwischen einer Anzahl Variabeln auch partiell nach einer diff. können; um das Verfahren allgemein zu bezeichnen sei die Gl. $f(u\,v\,w\ldots) = 0$ gegeben und seien u, v, w sämtlich Fct. der Größen $x, y, z \ldots t$, woraus gesetzt werde t als Fct. der übrigen Var. betrachtet, und man wolle die Gl. nach der Var. x partiell differenzieren, so hat man zunächst nach einem vorhergehenden Satz die Gl.: $\left(\frac{df}{du}\right)du + \left(\frac{df}{dv}\right)dv + \left(\frac{df}{dw}\right)dw = 0$

Nun müssen die Diff. du, dv, dw u.s.f. als durch dx gegeben best. werden, welche sich ergeben, wenn man in u, v, w u.s.f. x, und die davon abhängige Größe t nur sich ändern läßt. Man erhält also für du zwei Glieder, nämlich eines, welches sich auf das Vorkommen v. x in u und ein anderes, welches sich auf das Vorkommen v. t in u bezieht, und es ist die Summe dieser $\frac{du}{dx} + \frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ u.s.f. so daß man also hat:

$$\frac{df}{du}\left\{\frac{du}{dx} + \frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right\} + \frac{df}{dv}\left\{\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right\} + \frac{df}{dw}\left\{\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right\} + \ldots\ldots \text{——} \Big) = 0$$

Entwicklg der Taylor'schen u. Maclaur'schen Reihe für zwei Veränderliche.

Man verlangt $f(x+h, y+k)$ nach Potenzen v. h u. k zu entwickeln. Wendet man die Taylor'sche Reihe für 1 Var. auf diesen Ausdr. an, indem man $y+k$ nicht berücksichtigt, so erhält man

$$f(x+h, y+k) = f(x, y+k) + \frac{df(x, y+k)}{dx}\cdot h + \frac{d^2f(x, y+k)}{dx}\,\frac{h^2}{1.2} \ldots$$

Wendet man nun auf jedes einzelne Glied dieser Reihe die Tayl. Entw. nochmals an, indem man nach k fortschreitet, so findet man

1. $f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(\frac{df}{dy}\right)k + \frac{d^2f}{dy^2}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3f}{dy^3}\cdot\frac{k^3}{1.2.3} \cdots$

$\quad + \left(\frac{df}{dx}\right)h + \left(\frac{d^2f}{dx\cdot dy}\right)hk + \frac{d^3f}{dx\,dy^2}\cdot\frac{hk^2}{1.2} \cdots$

$\quad + \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3f}{dx^2dy}\frac{h^2k}{1.2}$

$\quad + \left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots$

Beispiele hierüber sind:

$f = \arcsin(ax+by)$

$f = l(ax^2+by^2)$

Diese Reihe (1) lässt sich schreiben, wie folgt:

2, $f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(\frac{df}{dx}\cdot h + \frac{df}{dy}k\right)$

$\quad + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}h^2 + \frac{2\,d^2f}{dx\,dy}hk + \frac{d^2f}{dy^2}\cdot k^2\right)$

$\quad + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3f}{dx^3}\cdot h^3 + 3\frac{d^3f}{dx^2dy}h^2k + 3\frac{d^3f}{dx\,dy^2}hk^2 + \frac{d^3f}{dy^3}\cdot k^3\right) + \cdots$

u. analog ~~man~~ kann man symbolisch schreiben.

3, $f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)df + \frac{1}{1.2}\left(\frac{h}{dx}+\frac{k}{dy}\right)^2 d^2f + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{h}{dx}+\frac{k}{dy}\right)^3 d^3f + \cdots$

Bedient man sich der Summenzeichen, so kann man auch noch schreiben

4, $f(x+h, y+k) = f(x,y) + \sum\sum \frac{h^n k^m}{n!\,m!}\cdot\frac{d^{m+n}f}{dx^n\,dy^m}$

Werden $h = dx$, $k = dy$ ∞ klein vorausgesetzt, geht in der Gl., weil jedes Glied in der Klammer ein vollst. Diff. der fct übergeht, und man erhält also

5, $f(x+dx, y+dy) = f(x,y) + df + \frac{d^2f}{1.2} + \frac{d^3f}{1.2.3} + \cdots$

Bedeutet f eine fct von beliebig vielen Größen x, y, z, so wird man mit Rücksicht auf die Gl. ... haben,

$f(x+h, y+k, z+l \ldots) = f(x,y,z\ldots) + \left(\frac{df}{dx}\right)h + \left(\frac{df}{dy}\right)k + \left(\frac{df}{dz}\right)l + \cdots$

und analog zur Gl. (5)

$f(x+dx, y+dy, z+dz\ldots) = f(x,y,z\ldots) + \frac{df}{1} + \frac{d^2f}{1.2} + \frac{d^3f}{1.2.3} + \cdots$

Aus der Taylor. Reihe für 2 Var. kann man auch die Maclaurin'sche ableiten, setzt man nämlich in der ersteren $x = 0$, $y = 0$, (Gl. ...) und [illegible]

Wenn die gegebene Gl. 2 willkürliche Fct. enthält, so daß $F(x), y, z, \varphi(u), \psi(v) = 0$ gegeben ist, so genügt die einmalige part. Diff. nach x u. y nicht mehr. Diff. m. 3 mal, so kommen in den resultirenden Gl. die folgenden Gr. vor $\varphi(u)$, $\psi(u)$ und man bedarf also nun eine von $\varphi'(u)$ $\psi'(u)$ φ u. ψ zu elim. Elimination Gl. zu $\varphi''(u)$ $\psi''(u)$ ... im Ganzen 7 Gl., wenn man 2 mal diff., wodurch man erhält

$$F=0 \quad \frac{dF}{dy}=0 \quad \frac{d^2F}{dx^2}=0 \quad \frac{d^2F}{dx\,dy}=0 \quad \frac{d^2F}{dy^2}=0$$

$$\frac{d^3F}{dx^3}=0 \quad \frac{d^3F}{dx^2\,dy}=0 \quad \frac{d^3F}{dx\,dy^2}=0 \quad \frac{d^3F}{dy^3}=0$$

wodurch noch 2 neue Gr. $\varphi'''(u)$ u. $\psi'''(u)$ hinein kommen, also 8 Unbek. und 10 Gl. $(1+2+3+4)$. Man hat demnach 1 überflüssige Gl.

Nehmen wir an es seien n Unbek. zu eliminiren

$F(x, y, z\; \varphi(u), \psi(v), \chi(w) \ldots) = 0$ und denkt sich ob wird diese m mal nach x, y .. diff. so erhält man $1+2+3+4+\ldots m+1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$

Darin sind die Größen zu eliminiren

$\varphi(u)$ $\psi(v)$, $\chi(w)$ ...

$\varphi'(u)$ $\psi'(v)$, $\chi'(w)$ u. so fort

$\varphi^{(m)}(u)$ $\psi^{m}(v)$ $\chi^{m}(w)$ ..., deren Anzahl $= n(m+1)$ ist

Um die Elimination bewerkstelligen zu können muß $\frac{(m+1)(m+2)}{2} > n(m+1)$ oder $m > 2n-2$

Wollte man genau so viel Gl. erhalten als nöthig sind, so müßte man setzen $\frac{(m+1)(m+2)}{2} = n(m+1)+1$ woraus folgt $(m+1)^2 - (2n-1)(m+1) = 2$, und

$m = \frac{2n-3+\sqrt{(2n-1)^2+8}}{2}$. Nun aber ist

$(2n-1)^2+8$ nur eine Quadratzahl für $n=1$, wofür $m=1$ wird, in allen andern Fällen erhält man mehr Gl. etc nicht. sind u. kann. also im allg. mehr. Glgn bilden, welche von φ, ψ, etc frei sind u. welche man wieder Simultane Diff. Gl. der gedachten Gl. d. Integrale nennen kann. Man kann aus den Gl. welche die Diff. darstellt wieder andere bilden, welche n. d. (n−1)te (n−2)te Ordg. sind und bezeichnen nur einen 2, 3te aufz. [illegible] sehr und welche man daher wieder die 2te 3te Integrale nennen kann. Aus diesen Gl. aber läßt sich nachweisen durch bloße Elimination der Diff. d. z nach x u. y, das allgem. Integr. findet man. Beispiel. Man habe

$$z + \varphi(x+ay) + \psi(x-ay) = 0, \text{ so ist}$$

$u = x+ay \quad v = x-ay \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad \frac{du}{dy} = a, \quad \frac{dv}{dx} = 1$

$\frac{dv}{dy} = -a$, und man hat:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{d\psi}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = 0$$

$$\frac{dz}{dy} + \frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{du}{dy} + \frac{d\psi}{dv}\cdot\frac{dv}{dy} = 0$$

Nehmen wir an es sei die willkürliche Function $\varphi(u)$ durch eine zu ersetzen. Sei Gl. $F(x, y, z \ldots \varphi(u)) = 0$ gegeben. Um diese partiell nach x zu diff. muß man berücksichtigen daß x selbst und z, welches sich mit x ändert darin vorkommen und daß insofern x u. z in φ vorkommen ein weiterer Theil des Diff.-quot. entsteht, welcher erhalten wird, wenn man F nach der Größe φ und φ nach u differenzirt und das Produkt der beiden partiellen Diff. quot. noch mit jenem v. u mult. muß, welches x u. enthält. Nach den bekannten Regeln wäre also die Gl.

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{dF}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{du}\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{dF}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{du}\left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

Man hat also 2 Gl. in w. $\varphi(u)$ u. $\varphi'(u)$ vorkommen welche man eliminiren und also schließlich eine von der Charakteristik freie Gl. erh. welche zum Integral die gesuchte Gl. hat.

Beispiel. Es sei:

$\varphi(z) + x \sin\varphi(z) + y = 0$ ist $\frac{dF}{dx} = \sin\varphi(z)$, $\frac{dF}{dy} = 1$

$\frac{dF}{dz} = 0 \qquad \frac{dF}{d\varphi} = 1 + x\cos\varphi(z) \qquad \frac{du}{dx} = 0 \quad \frac{du}{dy} = 0$

$\frac{du}{dz} = 1$ also. $\sin\varphi(z) + 0 + (1 + x\cos\varphi(z))\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{dz}{dx} = 0$

$$1 + 0 + (1 + x\cos\varphi z)\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{dz}{dy} = 0$$

woraus man erhält:

$\sin\varphi(z) = \dfrac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}}$, es sei $\frac{dz}{dx} = p$ u. $\frac{dz}{dy} = q$

$\sin\varphi(z) = \frac{p}{q} \qquad \varphi(z) = \arcsin\frac{p}{q}$

und in die urspr. Gl. eingesetzt:

$\arcsin\frac{p}{q} + x\cdot\frac{p}{q} + y = 0$